HCU | HafenCity Universität Hamburg

Wissenschaftliche Arbeit

Ein allgemeines spektrales Konzept zur qualitativen und quantitativen Analyse der Verzerrung im 1. und 2. Moment von Parameterschätzungen infolge unterschiedlicher Fehler sowie Nichtlinearität im Beobachtungsmodell und Anwendung auf geodätische Netze

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

von der

HafenCity Universität Hamburg

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Dipl.-Ing. Matthias Brunkhorst

aus Stade

Hamburg 2015

HafenCity Universität Hamburg

Überseeallee 16

20457 Hamburg

Prüfungskommission

Vorsitzender : Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil Jochen Schiewe

Hauptreferent : Univ.-Prof. Dr.-Ing. Harald Sternberg

Korreferenten : Prof. Dr.-Ing. Reiner Jäger

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Schramm

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.2014

Meiner Familie

Die Ausgleichungsrechnung bemüht sich um die Ermittlung der wahrscheinlichsten Ergebnisse, aber bedenke:

Niemand ist weiter von der Wahrheit entfernt als derjenige, der alle Antworten weiß.
(Chuang Tsu, chin. Philosoph, 365 - 290 v. Chr.)

Zusammenfassung

In geodätischen Ortungsaufgaben und Netzlösungen erfolgt die Bestimmung der gesuchten Parameter – wie der besonders interessierenden Netzkoordinaten – erwartungstreu, falls ausschließlich zufällige beobachtungsbezogene Varianzanteile und ein fehlerfreies Modell zur Abbildung der Beobachtungen auf diese Parameter vorliegen. Das Auftreten nicht-zufälliger Fehleranteile in den Netzbeobachtungen oder den festen Anschlusskoordinaten führt ebenso wie ein nicht fehlerfreies Abbildungsmodell zu einer nicht mehr erwartungstreuen Schätzung mit geometrischen und stochastischen Netzverzerrungen wie einer gegenüber dem unverzerrten Fall ungünstigeren Parameterstochastik.

Als Ursache jener Verzerrungseffekte kommen neben deterministisch-systematischen Fehlern der verwendeten Anschlusspunkte sowie möglichen Vernachlässigungen in deren stochastischen Modell noch die beobachtungsbezogenen deterministisch- und stochastisch-systematischen Fehleranteile in Betracht, durch die darüber hinaus auch Korrelationen zwischen den Netzbeobachtungen und somit Kovarianzanteile verursacht werden. In geodätischen Lagenetzen wirken darüber hinaus Fehler im Abbildungsmodell der Beobachtungen quasi-systematisch auf die Parameter aufgrund der Nichtlinearität des Modells und der so erforderlichen Linearisierung (Nichtlinearitätsverzerrungen ab der 2. Ordnung). Alle jene systematischen Fehleranteile führen auf eine geometrische (Parameterbias) und eine stochastische (Kovarianzmatrixzuschlag) Netzverzerrungskomponente.

Die Anwendung des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) auf jene parameterbezogene Zuschlagsmatrix als Vergleichskovarianzmatrix und mit der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianzmatrix im Rahmen des spektralen Analysekonzepts erlaubt die spektrale Zerlegung der Zuschlagsmatrix unter Bezugnahme auf die Referenzkovarianzmatrix und liefert über die AEWP-Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren die latenten Schwachformen des untersuchten Netzes als Trägerfunktionen der Verzerrung dessen Geometrie sowie die stochastische quadratische Netzverzerrung als quantitative Testgröße des Verzerrungseffekts.

Zur qualitativen und quantitativen Analyse der geometrischen und stochastischen Verzerrungswirkung nicht-zufälliger Fehleranteile in Nivellement- und Lagenetzen ließ sich mit Anwendung der spektralen Zerlegung einer Vergleichs- in Bezug auf eine Referenzkovarianzmatrix ein allgemeines einheitliches Konzept einschließlich Vergleichsaussagen zu unterschiedlichen Parameterstochastiken finden.

Eine konzeptionelle qualitative und quantitative Analyse von Verzerrungseffekten aufgrund von teilweise erstmalig modellierten unterschiedlichen systematischen und stochastischen Modellfehlern in Nivellement- und Lagenetzen jeweils unterschiedlichen Designs führt über die daraus gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile auf Optimierungskriterien für deren Herabsetzung im Sinne einer spektralen Netzoptimierung.

Abstract

In geodetic positioning tasks and network solutions, we determine parameters – particularly the most interesting network coordinates. This is carried out in an unbiased fashion if only random observation-related variance components and an error-free model for mapping the observations onto these parameters are available. The appearance of non-random error components in the network observations or in the fixed coordinates and a not error free mapping model cause an estimation that is no longer unbiased and includes geometric and stochastic distortions of the network, and also causes less favourable stochastics of the parameters as compared to the unbiased case.

Possible reasons for those distortion effects are to be considered, being deterministic-systematic errors within the fixed coordinates and a possible neglect in their stochastic model as well as observation related deterministic- and stochastic-systematic error contributions. These also cause correlations between network observations and hence create covariance components. Above this, in horizontal geodetic networks, errors in the mapping model for the observations affect the parameters in a quasi-systematic way due to the non-linearity of the model and to the linearisation (non-linearity distortions starting at the second order). All these systematic error contributions lead to a geometrical (parameter bias) as well as a stochastic (covariance matrix) network distortion component.

The application of the general eigenvalue problem on this additive covariance matrix as a comparison matrix, and with the conventional covariance matrix of the parameters as reference covariance matrix, in the context of the spectral analysis concept, permits the spectral decomposition of the additive matrix with respect to the reference covariance matrix, and delivers, together with the eigenvalues and their related eigenvectors, the latent weak-forms of the examined geodetic network as supporter functions of the geometry-related network distortion together with the stochastic squared network distortion as a quantitative test statistic of the distortion effect.

For the qualitative and quantitative analysis of the geometric and stochastic distortion (skewing) effects of non-random error parts in levelling and horizontal networks, a general and unique concept could be found by application of the spectral decomposition of a comparative matrix relative to the reference covariance matrix including comparative statements about different parameter stochastics.

A conceptual qualitative and quantitative analysis of distortion effects (skewing) has been carried out that models – in parts for the first time – different systematic and stochastic model errors in levelling and horizontal networks of different designs. Due to the findings obtained therefrom, concerning the effect of non-random error components, this leads to optimisation criteria for their decrease in the sense of a spectral network optimisation.

Inhaltsverzeichnis Hauptteil

1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse und methodische Aufbereitung 9

1.1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse geodätischer Netze 9

1.2 Methodische Aufbereitung des Themas der Arbeit 13

2 Theoretische Grundlagen 14

2.1 Einleitung 14

2.2 Netzverzerrungstheorie und stochastische Netzverzerrung 17

2.2.1 Nicht strenge Ausgleichung und deterministische Netzverzerrung 19

2.2.1.1 Nicht strenge Ausgleichung 19

2.2.1.2 Deterministische Netzverzerrung und Zusatzparameterschlupf 22

2.2.2 Allgemeines Eigenwertproblem (AEWP) 23

2.2.2.1 Num. Lösung zur Ermittlung der Eigenwerte in Anhängigkeit der Eigenvektoren 23

2.2.2.2 Simultane Diagonalisierung und Kovarianzmatrixvergleich 24

2.2.2.3 Darstellung der Ausgangsmatrizen (A, B) mit Trägerfunktionen aus (λ_i, x_i) 25

2.2.2.4 Natürliche und latente Schwachformen 27

2.2.2.5 Hauptschwachform und spektrales Analysekonzept 29

2.2.2.6 Interpretation des Eigenwertspektrums aus dem AEWP 29

2.2.2.7 Quantifizierung der Steilheit von Eigenwertspektren 31

2.2.3 Stochastische Modellierung nicht-zufälliger Fehlertypen 33

3 Relative Quantifizierung der effektbelasteten Parameterstochastik 36

3.1 Effektbelastende Induktionswirkungen 36

3.2 Stochastisches Budget geodätischer Netze 38

3.3 Relative Quantifizierung der Effektbelastung 39

3.3.1 Ziel der Quantifizierung 39

3.3.2 Quantifizierung über die Netzverzerrung 39

3.3.3 Quantifizierung über Matrizenvolumina 40

3.3.4 Quantifizierung der ausschließlich varianzenbezogenen Effektbelastung 41

3.3.5 Bewertung und Fazit zur relativen Quantifizierung der Effektbelastung 42

3.3.6 Anwendungsbeispiele zur Quantifizierung der Effektbelastung in zwei Höhennetzen 43

4 Analyse zufälliger und systematischer Fehleranteile im Nivellement 46

5 Fehlertheorie 2. Ordnung 49

5.1 Bedeutung der Fehlertheorie 2. Ordnung als geodätisches Forschungsgebiet 49

5.2 Grundsätzliches zur Fortpflanzung zufälliger Varianzanteile 52

5.3 Geometrische und stochastische Verzerrungseffekte 2. Ordnung der nicht-linearen Varianzenfortpflanzung 55

5.3.1 Fortpflanzung systematischer und zufälliger Varianzanteile in nichtlinearen Funktionen 55
5.3.2 Verzerrungseffekte 2. Ordnung f. skalare Funktionen m. skalarwertigen Beobachtungen 56
5.3.3 Verzerrungseffekte 2. Ordnung f. skalare Funktionen m. vektorwertigen Beobachtungen 57
5.3.4 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für vektorwertige Funktionen 60
5.3.5 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit normalverteilten skalarwertigen Beobachtungen 63
5.3.6 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit normalverteilten vektorwertigen Beobachtungen 64
5.3.7 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für vektorwertige Funktionen mit normalverteilten Beobachtungen 65
5.3.8 Übersicht der hier gefundenen Verzerrungseffekte 2. Ordnung 65

5.4 Auswertung vorliegender Quellen zu Verzerrungseffekten 2. Ordnung 67

5.5 Wirkung der Varianzanteile 2. Ordnung 69

5.5.1 Effekte 2. Ordnung auf die Momente 1. Ordnung von Parametern 69
5.5.2 Effekte 2. Ordnung auf die Momente 2. Ordnung von Parametern (Parameterstochastik) 71
5.5.3 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten der Anteile 2. Ordnung 71
5.5.4 Zusammenhänge zwischen deterministisch-systematischer und stochastischer Wirkung der Anteile 2. Ordnung 72

5.6 Analogiebetrachtungen 76

5.6.1 Analogien im Bereich der Anteile 1. und 2. Ordnung 76
5.6.1.1 Fortpflanzung der beobachtungsbezogenen systematischen Fehleranteile 76
5.6.1.2 Fortpflanzung der parameterbezogenen systematischen Fehleranteile 77
5.6.1.3 Fortpflanzung der beobachtungsbezogenen stochastischen Fehleranteile 78
5.6.1.4 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten der Anteile 1. Ordnung 80

5.6.2 Analogie zu den nicht-zufälligen Fehleranteilen des geometrischen Nivellements 80

5.7 Größe der systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung 82

5.7.1 Das einfache polare Anhängen 82
5.7.2 Der einseitig angeschlossene Polygonzug 82
5.7.3 Fazit und Folgerung 86

5.8 Wahre Parameterstochastik und Restgliedschätzung der Anteile höherer Ordnung 88

5.9 Fazit zur nichtlinearen Varianzenfortpflanzung 92

6 Analyse der zufälligen und systematischen Fehleranteile in Lagenetzen 94

6.1 Zielsetzung der stochastischen Analyse von Lagenetzen 94

6.2 Ursachen nicht-zufälliger Fehleranteile in Lagenetzen 96

6.3 Modellierung beobachtungsbezogener systematischer Fehleranteile in Lagenetzen 98

6.3.1 Korrelationsverhalten geodätischer Beobachtungen 98
6.3.2 Beobachtungsbezogene deterministisch-systematische Fehleranteile (∇l) in Lagenetzen 98
6.3.2.1 Konstanter Fehler in der Nullpunktfestlegung des EDM-Moduls 98
6.3.2.2 Konstanter Fehler in der Grundfrequenz des EDM-Moduls 99
6.3.2.3 Summenwirkung der streckenbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile 99
6.3.3 Beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile (δ) in Lagenetzen 99
6.3.3.1 Meteorologisch induzierter EDM-Maßstabsfehler 100
6.3.3.2 Tachymeterseitiger Zentrierfehler 101
6.3.3.3 Roverseitiger Zentrierfehler 103
6.3.3.4 Summenwirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer Fehleranteile (δ) 104

6.4 Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen 105

6.4.1 Quantifizierungsalgorithmus 105
6.4.2 Vergleich zur Quantifizierung systematischer Anteile in Nivellementnetzen 106

6. 5 Induktionswirkungen nicht-zufälliger Fehleranteile in Lagenetzen 108

6.5.1 Stochastische Wirkung deterministisch-systematischer Fehler 108
6.5.1.1 Deterministisch-systematische Fehler in Lagenetzen 108

6.5.1.2 Fazit 109
6.5.2 Stochastische Wirkung anschlusspunktbezogener stochastisch-systematischer Fehler 110
6.5.2.1 Das *Synthetische Verdichtungsnetz* 110
6.5.2.2 Ergebnisse und Fazit 113
6.5.3 Stochastische Wirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer Fehler 114
6.5.3.1 Das *Freinetz Rethebrücke* 114
6.5.3.2 Ergebnisse und Fazit 115
6.5.4 Geometrische und stochastische Wirkung quasi-systematischer Fehler 117
6.5.5 Stochastische Wirkung des Netzdesigns 0. und 1. Ordnung 117
6.5.5.1 Wirkung des Designs 0. Ordnung 118
6.5.5.2 Wirkung stochastisch optimierter Designfestlegung 119
6.5.5.3 Bewertung und Fazit 120
6.5.6 Geometrische und stochastische Wirkung geometrischen Zwangs 120
6.5.6.1 Methodik 120
6.5.6.2 Bewertung und Fazit 121
6.5.7 Stochastische Wirkung einer Realnetzstichprobe 122
6.5.7.1 Ergebnisse 122
6.5.7.2 Bewertung und Fazit 124
6.5.8 Induktionswirkungen im langwellig belasteten Landesnetz *Rheingrenze* 124

6.6 Ergebnisübersicht und Zwischenfazit 128

6.6.1 Ergebnisübersicht und Vergleich der betrachteten Beispielnetze, Tab. (6.5) 128
6.6.2 Zwischenfazit zu den Beispielnetzbetrachtungen 130

6.7 Optimierungskriterien zur Herabsetzung der Wirkung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen 131

6.8 Konzept zur Analyse der Verzerrung von Lagenetzen infolge zufälliger und systematischer Modellfehler 133

6.9 Zusammenfassung über die zufälligen und systematischen Fehleranteile in Lagenetzen 135

7 Zusammenfassung und Fazit 137

Inhaltsverzeichnis Anhänge

Anmerkung:

In der Nummerierung der Anhänge ist deren erste Gliederungsebene mit der ersten Gliederungsebene des jeweils zugehörigen Kapitels aus dem Hauptteil identisch.

A.2.1 Spektrale Optimierungskriterien für die Stochastik geodätischer Netze 142

A.2.2 Stochastische Netzoptimierung durch Datums- und Stützpunkte nach spektralen Kriterien 143

A.2.2.1 Grundsätzliches und Zielsetzung 143
A.2.2.2 Optimierungstheorie 143
A.2.2.3 Optimale Datumsfestlegung freier geodätischer Netze 145
A.2.2.4 Optimale Positionen für zusätzliche Stützpunkte referenzierter Netze 146

A.2.3 Äquivalenz des symmetrischen Matrizenprodukts $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ mit der Form $sp\{\boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}\}$ 147

A.5.1 Erwartungswerte der univariaten Normalverteilung bis 4. Ordnung 149

A.5.1.1 Dichtefunktion der Normalverteilung und n-tes gewöhnliches Moment 149
A.5.1.2 Erwartungswert 1. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y 149
A.5.1.3 Erwartungswert 2. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y 150
A.5.1.4 Erwartungswert 3. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y 151
A.5.1.5 Erwartungswert 4. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y 152

A.5.2 Erwartungswerte der multivariaten Normalverteilung bis 2. Ordnung 155

A.5.2.1 Korrelation 0. Ordnung 155
A.5.2.2 Korrelation 1. Ordnung 156
A.5.2.3 Beweis für die Varianz der Varianz 157
A.5.2.4 Stochastizität des empirischen und theoretischen Korrelationskoeffizienten 158
A.5.2.5 Beweis für die Varianz der Kovarianz 159
A.5.2.6 Schlussbeweis für den Erwartungswert $E\{z_a * z_b\}$ 159

A.5.3 Entwicklung des Erwartungswertterms $\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^{\boldsymbol{T}}\}$ 161

A.5.4 Entwicklung der parameterseitigen Kovarianzanteile 2. Ordnung nach Grafarend & Schaffrin (1993) 171

A.5.4.1 Nachbildung der Entwicklung von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) 173
A.5.4.2 Falsifizierung der Entwicklung nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) 177
A.5.4.3 Falsifizierung der Verzerrungseffekte für eine skalare Beobachtung und einen skalaren Parameter nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) 179
A.5.4.3.1 Falsifizierung des geometrischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger symmetrischer Dichtefunktion und beliebigem Approximationspunkt (C29) 180
A.5.4.3.2 Falsifizierung des stochastischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger symmetrischer Dichtefunktion und beliebigem Approximationspunkt (C30) 180
A.5.4.3.3 Falsifizierung des stochastischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren normalverteilten Beobachtung und mittelwertigem Approximationspunkt (C32) 181

A.5.5 Quantifizierung von Nichtlinearität und Verzerrung in nichtlinearen L2-Norm-Schätzungen nach TEUNISSEN (1989) 182

A.5.5.1 Einleitung und Zielsetzung 182
A.5.5.2 Bestimmung der Verteilungseigenschaften nichtlinearer Schätzer 182
A.5.5.2.1 Monte-Carlo-Methode 182
A.5.5.2.2 Asymptotische Theorie 183
A.5.5.2.3 Theorie der Zusammenhänge zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion 183
A.5.5.3 Verzerrung nichtlinearer Schätzungen 184
A.5.5.4 Quantifizierung der Nichtlinearität der Beobachtungsgleichungen 186
A.5.5.5 Geometrische Verzerrung der aus den Zielgrößen L2-Norm-geschätzten Ausgangsgrößen 187
A.5.5.6 Stochastische Verzerrung des L2-Norm-geschätzten parameterbezogenen Residuenvektors 188
A.5.5.7 Skalare Quantifizierung der Verzerrung 189
A.5.5.8 Fazit zur Quantifizierung von Nichtlinearitätseffekten 190

A.5.6 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten einer skalaren Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger Dichtefunktion für die Anteile 2. und 3. Ordnung 192

A.5.7 Entwicklung des Erwartungswertterms $\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}})\}$ 195

A.5.8 Entwicklung der zweiten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen 201

A.5.8.1 Ableitungen nach den Richtungen 201
A.5.8.1.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes 201
A.5.8.1.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes 202
A.5.8.1.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes 202
A.5.8.1.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes 203
A.5.8.1.5 Ableitung für die Orientierungsunbekannte 204
A.5.8.2 Ableitungen nach den Strecken 204
A.5.8.2.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes 204
A.5.8.2.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes 204
A.5.8.2.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes 204
A.5.8.2.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes 204
A.5.8.2.5 Ableitung für den Maßstabsfaktor 205
A.5.8.3 Ableitungen nach den Basislinien 205
A.5.8.3.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes 205
A.5.8.3.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes 206
A.5.8.3.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes 206
A.5.8.3.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes 207
A.5.8.3.5 Ableitung für den Drehwinkel 208
A.5.8.3.6 Ableitung für den Maßstabsfaktor 211

A.5.9 Partielle erste und zweite Ableitungen nach den Beobachtungen im Polygonzug 213

A.5.10 Größe der systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung 217

A.5.10.1 Das einfache polare Anhängen 217
A.5.10.1.1 Konfiguration des Beispiels 217
A.5.10.1.2 Größenordnung der Fehleranteile 1. und 2. Ordnung 218
A.5.10.2 Der einseitig angeschlossene Polygonzug 220

A.5.11 Der GUM (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*) 226

A.6.1 Beispiele für langwellige Schwachformen in ausgedehnten Lagenetzen 228

A.6.2 Das Festpunktnetz *Hamburgisches Wattenmeer* 231

A.6.2.1 Allgemeines und Bestandsprüfung 231
A.6.2.2 Historische und GNSS-gestützte Georeferenzierung 233
A.6.2.3 GNSS-gestützte Prüfung des Lagefestpunktfeldes 233

A.6.2.3.1 Festlegung von Ist- und Soll-Bezug 233
A.6.2.3.2 Funktionales Modell 234
A.6.2.3.3 Stochastisches Modell 236
A.6.2.3.4 Randbedingungen zur Ausgleichung 236
A.6.2.3.5 Ergebnisse 236
A.6.2.4 Stochastische Wirkung der systematischen Fehleranteile 237

A.6.3 Geometrische und stochastische Wirkung geometrischen Zwangs 240

A.6.3.1 Quasi-Knotenpunkte als Anschlusspunkte 240
A.6.3.2 Non-Knotenpunkte als Anschlusspunkte 243

A.6.4 Verifizierung von Lageknotenpunkten aus geodätischen Schwachformen 247

A.6.4.1 Verifizierungsmethode 247
A.6.4.2 Verifizierungsalgorithmus 248

A.6.5 Empirische 7-Parameter-Bestimmung nach der differentiellen Methode 249

A.6.5.1 Problemstellung 249
A.6.5.2 Lösungsansatz 249
A.6.5.3 Algorithmus zur empirischen Parameterbestimmung 250
A.6.5.4 Genauigkeitsbetrachtung 252
A.6.5.5 Anmerkungen 252
A.6.5.5.1 Allgemeines und Randbedingungen 252
A.6.5.5.2 Bedeutung der Geoidundulation 253
A.6.5.6 Alternativverfahren räumliche Ähnlichkeitstransformation 254

A.6.6 Prüfung der RTK-DGPS-Methode hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit als Meßverfahren zur Sicherungsmessung des Neuwerker Ringdeichs 256

A.6.6.1 Problemstellung 256
A.6.6.2 Lösungsansatz 256
A.6.6.3 Ergebnisse 259
A.6.6.4 Bewertung und Fazit 261

Abbildungsverzeichnis 262

Tabellenverzeichnis 264

Literaturverzeichnis 266

1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse geodätischer Netze und methodische Aufbereitung

1.1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse geodätischer Netze

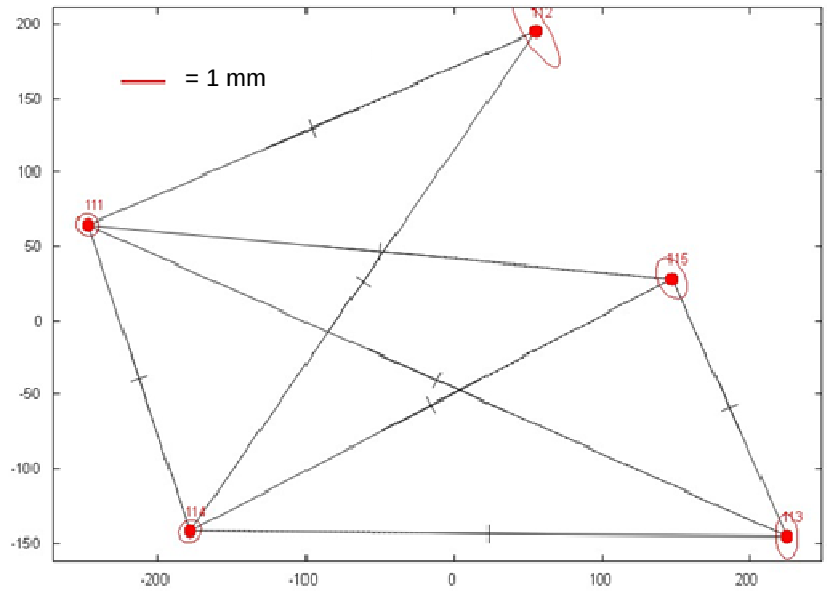
Der Algorithmus zur Lösung redundanter geodätischer Punkt- und Netzbestimmungen nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate mit iterativer aber strenger Berechnung der Zielgrößen ist bekannt und in der geodätischen Praxis gefestigt (KAHMEN 2006). In der Geodäsie wurden sowohl die im Beobachtungsraum physikalisch tatsächlich vorhandenen Korrelationen als auch die Fehleranteile ab der 2. Ordnung jedoch bisher vernachlässigt und so die Stochastik der Zielgrößen als zu schätzende Parameter $\boldsymbol{x}$ zu günstig angegeben. Diese Tatsache führt insbesondere bei ingenieurgeodätischen Anwendungen sehr hoher Genauigkeit (z.B. Lagenetze mit angestrebten mittleren Punktfehlern von $\pm$ 2 mm oder besser) auf das Problem zu günstig ermittelter Punktgenauigkeiten, falls entsprechend der bisherigen konventionellen Ausgleichungen nur zufällig wirkende gerätebezogene Varianzanteile berücksichtigt werden. Die darüber hinaus existierenden und systematisch wirkenden Fehleranteile in einem geodätischen Netz, wie z.B. die Zentrierfehler der optischen Lote oder die Fehleranteile in der meteorologischen Beschickung der EDM-Strecken, befrachten die Beobachtungsstochastik sowohl mit zusätzlichen Varianzen als auch mit Kovarianzen und können in Abhängigkeit vom Netzdesign die Stochastik der Netzparameter – v.a. der Netzkoordinaten – sogar um ein Vielfaches erhöhen. Es ergibt sich somit schon aufgrund der beiden genannten systematisch wirkenden Fehlertypen grundsätzlich die Notwendigkeit zur stochastischen Modellierung jener und weiterer nicht-zufälliger Fehleranteile.

Als einführendes Beispiel sei das für ein infrastrukturelles Großprojekt in Hamburg grundlegende Lagenetz betrachtet, welches in seiner Basisvariante fünf als Pfeilerlösung ausgebildete Festpunkte umfasst und gemäß Abb. (1.1) in nahezu allen Kombinationen ausmessbar ist. Auf der Grundlage der im Sinne einfacher Standardabweichungen angegebenen Gerätegenauigkeiten $s_r = \pm 0.6$ mgon und $s_s = \pm 0.5$ mm ergeben sich zunächst mittlere Punktfehler zwischen $\pm$ 0.4 mm und $\pm$ 1.0 mm. Mit der zusätzlichen Einführung der systematisch wirkenden Fehleranteile (ebenfalls als 1σ) $\Delta T = \pm 3.5$ K und $\Delta P \pm 3.5$ hPa für die meteorologische Beschickung aller EDM-Strecken erhöht sich das Intervall der mittleren Punktfehler auf [0.6 mm; 1.4 mm]; derselbe Effekt lässt sich erzielen, wenn stattdessen ein Zentrierfehler von $ZT = \pm 0.5$ mm für alle Netzpunkte zusätzlich zu den rein zufälligen Varianzanteilen modelliert wird. Die Modellierung eines lediglich auf ± 1.0 mm erhöhten Zentrierfehlers führt auf ein Intervall von [0.9 mm; 1.9 mm] der mittleren Punktfehler und so schon auf eine Verdoppelung der ursprünglichen, nur auf klassischen zufälligen Varianzanteilen beruhenden Punktgenauigkeiten.

Es wird der Einfluss erkennbar, den bereits geringe systematisch wirkende Fehleranteile auf die Parameterstochastik eines geodätischen Netzes auszuüben vermögen. Die Analysen von Netzstochastiken auf der Grundlage ausschließlich zufälliger gerätebezogener Varianzanteile stellen somit erhebliche

Vernachlässigungen im Vergleich zu den tatsächlich bestehenden Verhältnissen mit den zusätzlichen Fehleranteilen dar.

Abb. (1.1) Lagenetz *Neue Bahnbrücke Kattwyk*
(Netzbild der konventionellen Ausgleichung mit den Helmertschen Fehlerellipsen):



Die sich aus den Wirkungen jener zusätzlichen Anteile gemäß des hier betrachteten überbestimmten erweiterten Gauß-Markov-Modells (GMM) mit i.A. nichtlinearen Modellzusammenhang

$$\boldsymbol{l} = l(\boldsymbol{x}) \tag{1.1a}$$

in der Kovarianzmatrix der Parameter ergebenden latenten Schwachformen (s. Kapitel 2.2.2.4) wurden zwar in der Fachliteratur (JÄGER et al. 2005, GRAFAREND & SCHAFFRIN 1993) diskutiert, aber bisher nicht umfassend dargestellt oder analysiert.

Die Berechnung des Moments 2. Ordnung erfolgte bisher für nichtlineare Fälle in linearisierter Form 1. Ordnung. Dadurch fehlte stets der parameterbezogene Kovarianzmatrixzuschlag für die 2. Ordnung als stochastische Nichtlinearitätsverzerrung.
Aufgrund der bisherigen Beschränkung auf die Stochastik nach der Fehlertheorie 1. Ordnung in der Geodäsie fehlen neben diesem auf die 2. Ordnung bezogenen Zuschlag für die Kovarianzmatrix der Parameter auch alle Zuschläge höherer Ordnungen, die in ihrer Summe gemeinsam mit dem Anteil für die 1. Ordnung die noch aufzustellende wahre Kovarianzmatrix der Parameter bilden.

Es fehlt ferner der zugehörige Parameterbias 2. Ordnung als geometrische Nichtlinearitätsverzerrung.

Beide Nichtlinearitätsverzerrungen 2. Ordnung sind für den nicht überbestimmten Fall der Varianzenfortpflanzung skalarer und vektorwertiger Beobachtungen beliebiger Dichteannahmen im Rahmen dieser Arbeit zu finden. Für die in der geodätischen Praxis wichtigen normalverteilten Beobachtungen

sind mögliche Erwartungswertformen in den Darstellungen jener Verzerrungen auf der Grundlage der zugehörigen konkreten Dichteannahme der Normalverteilung aufzulösen.

Die in den Quellen GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993), TEUNISSEN (1989) und MEKID & VAJA (2007) gezeigten Darstellungen der geometrischen und der stochastischen Nichtlinearitätsverzerrung sollen für die dort jeweils angegebenen Bedingungen gelten und werden durch Abgleich mit den Ergebnissen eigener Entwicklungen verifiziert und zum Teil auch falsifiziert.

Die nachfolgenden Entwicklungen beziehen sich auf die in JÄGER (1988) und JÄGER et al. (2005) dargestellten Grundlagen einer Netzverzerrungsbemessung, die sich auf alle o.g. Vernachlässigungen anwenden lässt. Diese quantitative und qualitative Bemessung mündet in das allgemeine Eigenwertproblem (AEWP) zur Ermittlung der durch jene Vernachlässigungen induzierten und voneinander unabhängigen latenten Netzschwachformen als Träger des geometrischen Verzerrungseffekts.

Es fehlt die Anwendung jener Methodik auf den sich aus der Fehlertheorie 2. Ordnung oder aus den Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen ergebenden Kovarianzmatrixzuschlag als Prüfling mit Bezugnahme auf die Kovarianzmatrix in der konventionellen, sich aus der Fehlertheorie 1. Ordnung ergebenen und unperfekten Form.

Im geometrischen Nivellement wirkt sich die in den bodennahen Luftschichten dauerhaft bestehende Refraktion unmittelbar auf die Lattenablesungen aus und führt so zu zusätzlichen, über die reine Meßgenauigkeit hinausgehenden und systematisch wirkenden Fehleranteilen, welche bisher in der geodätischen Praxis weitgehend unberücksichtigt geblieben sind. Die Ursachen jener Fehleranteile sind die zeitliche Veränderlichkeit des vertikalen Temperaturgradienten und dessen Stochastizität. Es ergeben sich außer den zusätzlichen Varianzanteilen hier auch Kovarianzen zwischen den als Beobachtungen eingeführten Standpunkthöhenunterschieden, da z.B. tendenziell zeitlich enger aufeinander folgende Beobachtungen stärker korreliert sind als Beobachtungen mit größerem zeitlichen Abstand. Ebenso verstärken sich diese zusätzlichen Fehleranteile mit zunehmender Geländeneigung. Beispielsweise führt ein über eine Entfernung von 60 m beobachteter Standpunkthöhenunterschied von 1 m auf einen zusätzlichen stochastisch-systematischen Fehleranteil von rund $\pm$ 0.3 mm für diese Beobachtung und entspräche damit einem mittleren Kilometerfehler von etwa $\pm$ 1.3 mm, der die Größenordnung von Präzisionsnivellements deutlich übersteigt. Hierin sind die gerätebedingten Meßgenauigkeiten nicht berücksichtigt.
In nivellitischen Höhennetzen stellen somit die Korrelationen der beobachteten Standpunkthöhenunterschiede stochastisch-systematische Fehleranteile dar, welche von FAWAZ (1981) durch eine Kovarianz- und Autokorrelationsfunktion erstmalig in einer Kovarianzmatrix der Beobachtungen stochastisch modelliert werden und so in Summe mit den in JÄGER (1990) modellierten deterministisch-systematischen Fehleranteilen die Schätzung einer Kovarianzmatrix der Parameter erlaubt, die keine Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen impliziert.

1.1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse geodätischer Netze

In BRUNKHORST (2012a) werden Optimierungskriterien zur Herabsetzung der Wirkung jener durch die Korrelation des vertikalen Temperaturgradienten und so originär physikalisch induzierten Fehleranteile gezeigt.

In Lagenetzen mit Richtungs-, Strecken- oder GNSS-Basislinienbeobachtungen führen Zentrierfehler zu Korrelationen im Beobachtungsmaterial und damit zu stochastisch-systematischen Kovarianz- und zusätzlichen Varianzanteilen der Beobachtungen; derselbe Effekt ergibt sich infolge zufälliger aber stochastisch-systematisch wirkender Fehler bei der Erfassung der meteorologischen Daten für die Korrektion der elektrooptischen Distanzmessung.

Beide vorgenannten und auf Lagenetze bezogenen Effekte wurden im Beobachtungsraum bisher nicht stochastisch modelliert und erzeugen zusätzliche Kovarianz- und Varianzanteile im Parameterraum; die zugehörigen geometrischen und stochastischen Wirkungen in Lagenetzen wurden somit bisher ebenfalls nicht analysiert.
Ergänzend zu den nicht-zufälligen Fehleranteilen des geometrischen Nivellements sind Optimierungskriterien zur Herabsetzung der Wirkung der entsprechenden Fehleranteile in Lagenetzen aufzustellen.

Für geodätische Netze jeder Dimension fehlt nun ferner die Anwendung der Methodik der spektralen Zerlegung auf den Kovarianzmatrixzuschlag der Parameter, welcher sich unter Berücksichtigung der physikalischen und der sonstigen Korrelationen der Beobachtungen ergibt, mit Bezugnahme auf die Kovarianzmatrix, welche sich bisher ohne Berücksichtigung dieser Korrelationen als konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter ergab.
Diese Analyse soll einen durch deterministisch-systematische Fehleranteile (wie z.B. eine falsche Richtungssatzorientierung) induzierten parameterbezogenen Kovarianzmatrixzuschlag einschließen.

Die spektrale Analyse selber ist dabei ein Teil eines noch aufzustellenden Konzepts zur quantitativen und qualitativen Analyse aller bisher vernachlässigten nicht-zufälligen Fehleranteile in Lagenetzen, welches sich dem Analysekonzept für Nivellementnetze aus BRUNKHORST (2012a) anlehnen wird, auf der klassischen Netzverzerrung basiert und als einheitliches spektrales Konzept zur quantitativen und qualitativen Darstellung der Verzerrungen im 1. und 2. Moment der Parameterschätzung schließlich auf alle geodätischen Netze anwendbar sein soll.
Dieses spektrale Konzept gilt im nicht-redundanten Fall auch für die zum Modellzusammenhang (1.1) reziproke Varianzenfortpflanzung

$$\boldsymbol{x} = x(\boldsymbol{l}) \tag{1.2a}$$

und lässt sich dabei auch ohne Konkretisierung auf eine spezielle Annahme zur Dichtefunktion der wahren Beobachtungsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}$ anwenden.

Es fehlt darüber hinaus Software zur ganzheitlichen Bearbeitung von zweidimensionaler geodätischer Netzausgleichung und spektraler Zerlegung anhand des allgemeinen Eigenwertproblems.

1.1 Entwicklungsstand zur spektralen Analyse geodätischer Netze

1.2 Methodische Aufbereitung des Themas der Arbeit

Einer Untersuchung der Verzerrung von Parameterschätzungen muss die Zusammenstellung der dafür erforderlichen theoretischen Grundlagen vorausgehen (Kapitel 2).
Einleitend wird die Existenz und Bedeutung der nicht-zufälligen Fehleranteile und deren Überführung in den Parameterraum mit einer geometrisch und einer stochastisch wirksamen Komponente, welche in die stochastische quadratische Netzverzerrung mündet, erklärt. Diese Netzverzerrung bildet bereits einen wichtigen Ausgangspunkt für die Bemaßung von Verzerrungseffekten in geodätischen Netzen und führt aufgrund ihrer Eigenschaft, sich als Spur einer quadratischen Matrix darstellen zu lassen, auf das Konzept einer spektralen Zerlegung und so auch auf eine Möglichkeit zur Kategorisierung dieser Verzerrungseffekte. Deren geometrische Komponenten bilden die sog. latenten Schwachformen als in der Regel latente Geometriedefizite im stochastischen Modell der Beobachtungen, die also verzerrend auf eine ausschließlich auf zufälligen Varianzanteilen basierende Netzgeometrie wirken.
Das Kapitel schließt mit der stochastischen Modellierung der beobachtungsbezogenen oder auf die Anschlusspunkte bezogenen nicht-zufälligen Fehler für deren Überführung in den Parameterraum.

Kapitel 3 vervollständigt die zur Themenbearbeitung erforderlichen Grundlagen mit der Vorstellung von drei möglichen Methoden zur Quantifizierung des stochastischen Verzerrungseffekts relativ zur herkömmlichen Parameterstochastik. Die einleitend gezeigte Übersicht der verschiedenen Ursachen (Induktionen) für Netzverzerrungen sowie deren Wirkungen und Kompensationsmöglichkeiten sind umfassend und grundlegend für diese Arbeit.

Eine konzeptionelle Analyse von Verzerrungswirkungen speziell in Nivellementnetzen erfolgte bereits in der Quelle BRUNKHORST (2012a); die zugehörige Zusammenfassung bildet Kapitel 4 und zeigt dort eine zu dieser Arbeit vergleichbare Methodik für die Aufbereitung des Themas auf.

Kapitel 5 und 6 sind hauptsächlich der eigentlichen Untersuchung von Netzverzerrungen gewidmet.
So wird in Kapitel 5 ausschließlich die Nichtlinearität im Beobachtungsmodell als netzverzerrende Ursache betrachtet und ausgewertet; die resultierende geometrische und stochastische Nichtlinearitätsverzerrung führen auf die Fehlertheorie 2. Ordnung, die hier für den allgemeinen Fall einer beliebigen symmetrischen Dichteannahme der wahren Beobachtungsfehler als auch für den speziellen und in der Geodäsie üblichen Fall normalverteilter Beobachtungen dargestellt wird. Eine Restgliedschätzung für die Anteile ab 2. Ordnung gibt auf der Basis von Modellannahmen die wahre Parameterstochastik an.

In Kapitel 6 erfolgt schließlich die systematische und konzeptionelle Analyse von Netzverzerrungen aller übrigen möglichen Ursachen anhand geeignet ausgewählter Beispielnetze. Die daraus erzielten Erkenntnisse werden zur Analyse von Schwachformen in einem Landesnetzbeispiel angewendet, im Zwischenfazit erklärt und für die Erstellung von Optimierungskriterien zur Herabsetzung der Wirkung systematischer Fehler in Lagenetzen genutzt. Der verbleibende Forschungsbedarf wird aufgezeigt.

2 Theoretische Grundlagen

Vorbemerkungen:

Zur besseren Unterscheidung sind Vektoren in diesem Kapitel mit Kleinbuchstaben im Fettdruck und Skalare ebenfalls mit Kleinbuchstaben aber ohne Fettdruck sowie Matrizen ausschließlich anhand von Großbuchstaben und mit Fettdruck dargestellt. Größen, für welche im jeweiligen Zusammenhang die konkrete Festlegung auf einen Skalar oder Vektor nicht erforderlich ist, sind gemäß des allgemeineren Falles als Vektor im Fettdruck dargestellt.

Die Angabe und der Gebrauch von zufällig wirkenden Varianzanteilen erfolgt in dieser Arbeit anhand der üblichen, aus der Fehlertheorie bekannten statistischen Methoden entsprechend des Typs A des GUM (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*). Die systematisch wirkenden Fehler- oder Varianzanteile werden hingegen nicht entsprechend des dafür im GUM vorgesehenen Typs B behandelt, weil im Sinne des GUM jenen Anteilen damit ein quasi-zufälliger Status unterstellt wird und dieser nach Ansicht des Autors nicht sachgerecht ist. Stattdessen erfolgt der Gebrauch systematisch wirkender Anteile in der klassischen Trennung zu den zufällig wirkenden statistischen Anteilen.

2.1 Einleitung

In der Geodäsie stellt die gemessene Größe l die sog. *Beobachtung* dar, die im Allgemeinen von ihrem wahren Wert $\tilde{l}$ abweicht. Diese Abweichung kann sich sowohl aus zufälligen, die Messgenauigkeit betreffenden als auch aus bestimmten systematischen, also nicht-zufälligen Anteilen zusammensetzen. Terminologisch seien in dieser Arbeit die zufälligen und nicht-zufälligen Anteile jener Abweichungen als *Fehleranteile* bezeichnet.

Für die Belange dieser Arbeit ist die qualitative und quantitative Analyse der (verzerrenden) Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile auf die Geometrie und die Stochastik geodätischer Netze von zentraler Bedeutung. Es sollen die verschiedenen nicht-zufälligen Fehlertypen aufgezeigt und die daraus resultierenden verschiedenen Netzverzerrungen in ihren Arten und Größenordnungen analysiert werden.

Nicht-zufällige Fehlertypen lassen sich einteilen in

- deterministisch-systematische Fehler ∇ wie
  - grobe Fehler (z.B. falsche Koordinaten eines festen Anschlusspunktes $\boldsymbol{\nabla x}$)
  - systematische Fehler (z.B. EDM-Maßstabsfaktor oder Richtungssatzverdrehung $\boldsymbol{\nabla l}$)
- stochastisch-systematische Fehler δ wie
  - Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen aufgrund fehlender Berücksichtigung von (zeitabhängigen) Beobachtungskorrelationen

Mit Hinzunahme der zufälligen Fehleranteile ε ergibt sich die originäre Beobachtung l somit zu

$$l = \tilde{l} + \varepsilon + \delta + \nabla \tag{2.1}$$

mit

l = originäre Beobachtung

$\tilde{l}$ = wahre Beobachtung

ε = zufälliger Fehleranteil

δ = stochastisch-systematischer Fehleranteil

∇ = deterministisch-systematischer Fehleranteil

Grundlegend für die Quantifizierung dieser Verzerrungswirkungen sind die auf die zu schätzenden Parameter wirkenden und meistens stochastisch bedingten Störparameter $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ unterschiedlichen Ursprungs und die einer Verhältnisbildung dieser Störparameter zur konventionellen Stochastik der Parameter folgende Netzverzerrung nach Kapitel 2.2. Diese auf die zu schätzenden Unbekannten bezogenen Störparameter $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ gehen dabei auf die beobachtungsbezogenen δ- und ∇-Fehleranteile zurück.

Betrachtet werden im Rahmen dieser Arbeit grundsätzlich das Gauß-Markov-Modell (GMM) mit dem i.A. nichtlinearen funktionalen Modell für die Umformung der wahren Parameter $\tilde{\boldsymbol{x}}$ nach Beziehung (1.1a)

$$\tilde{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{\varepsilon} = l(\tilde{\boldsymbol{x}}) \tag{1.1b}$$

und dem stochastischen Modell $\boldsymbol{C_l} = \boldsymbol{C_\varepsilon}$ der Beobachtungen. Der nicht-redundante Fall führt dabei auf das Schätzergebnis nach Beziehung (1.2a) nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = x(\tilde{\boldsymbol{l}}) \tag{1.2b}$$

Falls im Zusammenhang mit der jeweils betrachteten Fragestellung nicht anders erwähnt, gelte für die Dichteannahme der wahren Fehleranteile ε die Normalverteilung.

Die Anwendung der spektralen Analyse als allgemeines Eigenwertproblem (AEWP) mit dem sich aus den Störparametern ergebenden Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u, stoch}}$ als Vergleichskovarianzmatrix und der konventionellen parameterbezogenen Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{uu}}$ als Referenzkovarianzmatrix nach Kapitel 2.2 zerlegt die Netzverzerrung in die Eigenwerte jenes AEWP und liefert ferner die zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren. Daraus eröffnen sich folgende weiterführende Möglichkeiten im Rahmen des spektralen Analysekonzepts:

- Ermittlung der latenten Schwachformen des Netzes anhand der von Null verschiedenen Eigenwerte des AEWP und den zugehörigen umgeformten Eigenvektoren als qualitatives (Netz-) Verzerrungsmerkmal nach Kapitel 2.2.2.4 und 2.2.2.5.
- Diese latenten Schwachformen sind die Trägerfunktionen für die Verzerrung der Geometrie des Netzes; deren Modellierbarkeit anhand geometrischer Standardformelemente würde eine kompakte Darstellung des geometrischen Netzverzerrungseffekts erlauben.
- Die Referenz- und die Vergleichskovarianzmatrix lassen sich als Ausgangsmatrizen des AEWP über jene Trägerfunktionen nach Kapitel 2.2.2.3 in Summenform darstellen und so stochastisch spektral zerlegen.
- Das Spektrum der nach fallender Größe sortierten Eigenwerte des AEWP lässt Aussagen über Unterschiede zwischen der inneren Struktur der konventionellen Parameterstochastik und der reinen (stochastischen und parameterbezogenen) Verzerrungswirkung nach Kapitel 2.2.2.6 zu und führt zur Notwendigkeit einer geeigneten Bemaßung der Steilheit des AEWP-Eigenwertspektrums als objektivierte Testgröße dafür (Kapitel 2.2.2.7).

Der Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}$ der nicht-zufälligen Fehleranteile stellt für deterministisch-systematische Fehleranteile das dyadische Produkt der Störparameter als deren quadratische Form dar. Für stochastisch-systematische Fehleranteile resultiert $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}$ aus der Abbildung des zugehörigen beobachtungsbezogenen und statistisch begründeten Kovarianzmatrixzuschlags in den Parameterraum. Die Störparameter $\boldsymbol{\nabla u}_{stoch}$ gehen originär in den meisten Fällen auf beobachtungsbezogene nicht-zufällige Fehleranteile zurück. Kapitel 2.2.3 zeigt daher die vollständige stochastische Modellierung der beobachtungsbezogenen nicht-zufälligen sowie der nicht-beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Fehlertypen zum parameterbezogenen Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}$.

2.2 Netzverzerrungstheorie und stochastische Netzverzerrung

Basis für die Definition der Netzverzerrungstheorie und damit der Netzverzerrung in der quadratischen Form nach (2.2) bildet die Betrachtung des Einflusses grober Fehler auf die Netzgeometrie, speziell auf die gesuchten Koordinaten. Die Definition der Netzverzerrung geht auf BAARDA (1973) zurück und wurde anschließend von FÖRSTNER (1979) weiter entwickelt. In weiterer Fortführung wurde das spektrale Modell des allgemeinen Eigenwertproblems als Analysemodell darauf aufbauend hergeleitet (JÄGER et al. 2005).

Alternativ zu den groben beobachtungsbezogenen Fehlern lassen sich formal ebenso vernachlässigte stochastische Fehleranteile $\boldsymbol{\delta}$ in den Beobachtungen annehmen, die schließlich auf eine stochastische Netzverzerrung führen.

Dazu seien diese Fehleranteile $\boldsymbol{\delta}$ zunächst als beobachtungsbezogene Größen anhand von Beziehung (2.28) mit $\boldsymbol{F}$ gemäß Beziehung (2.27) in den Parameterraum zu stochastisch bedingten Störparametern $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ überführt:

$$\boldsymbol{\nabla u_{stoch}} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * \boldsymbol{\delta}$$

Für deren Moment 1. Ordnung gilt mit dem Übergang auf die Erwartungswerte und mit $E\{\boldsymbol{\delta}\} = 0$

$$E\{\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}\} = E\{(\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * \boldsymbol{\delta}\} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon^{-1}} * E\{\boldsymbol{\delta}\} = \boldsymbol{0}$$

Es ergibt sich die zugehörige quadratische Form nach JÄGER et al. (2005) stichprobenabhängig zur

diskreten stochastischen quadratischen Netzverzerrung $\overline{\delta'}^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\delta})$

mit

$$\overline{\delta'}^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\nabla u}_{stoch}^T * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}} \tag{2.2}$$

und

$\boldsymbol{C_{uu}}$ = Kovarianzmatrix der gesuchten Unbekannten bzw. Parameter aus strenger Ausgleichung
$\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ = stochastisch bedingte Störparameter

Führt man nun für die beobachtungsbezogenen vernachlässigten stochastischen Fehleranteile $\boldsymbol{\delta}$ das folgende dyadische Produkt ein und bildet den Erwartungswert, so erhält man die Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen: $\boldsymbol{\Delta C_{ll}} = E\{\boldsymbol{\delta} * \boldsymbol{\delta}^T\}$. Daraus ergibt sich unmittelbar der

$\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$ = Kovarianzmatrixzuschlag aufgrund der stochastisch bedingten Störparameter $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$

als deren Moment 2. Ordnung mit $\boldsymbol{F}$ gemäß Beziehung (2.27) zu

$$\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch} = E\{\boldsymbol{\nabla u}_{stoch} * \boldsymbol{\nabla u}_{stoch}^T\} = E\{\boldsymbol{F} * \boldsymbol{\delta} * \boldsymbol{\delta}^T * \boldsymbol{F}^T\} = \boldsymbol{F} * E\{\boldsymbol{\delta} * \boldsymbol{\delta}^T\} * \boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{\Delta C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T$$

Konträr zum Moment 1. Ordnung mit $E\{\boldsymbol{\nabla u}_{stoch}\} = \boldsymbol{0}$ gilt also für dieses Moment: $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch} \neq \boldsymbol{0}$.

Im nächsten Schritt erfolgt zur Erzielung der Unabhängigkeit von Stichproben der Übergang auf den Erwartungswert für $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\delta})$ und damit auf die

verallgemeinerte stochastische quadratische Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$

mit

$$E\{\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{\delta})\} = \bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll}) = E\{\boldsymbol{\nabla u}_{stoch}^T * \boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{\nabla u}_{stoch}\} = sp\{\boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}\}$$

und so

$$\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll}) = sp\{\boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}\} \tag{2.3}$$

Zum Nachweis der Identität $E\{\boldsymbol{\nabla u}_{stoch}^T * \boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{\nabla u}_{stoch}\} = sp\{\boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}\}$ siehe Anhang 2.3.

Die stochastische Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$ lässt sich nunmehr als Spur eines Produktes zweier quadratischer Matrizen und somit als Spur einer quadratischen Matrix darstellen. Das Konzept der spektralen Zerlegung jener Verzerrung nutzt diese Tatsache, da die Spur einer quadratischen Matrix nach JÄGER et al. (2005) mit der Summe der Eigenwerte aus dem speziellen Eigenwertproblem (SEWP) der Matrix identisch ist (mit $\boldsymbol{\Lambda}$ = Spektralmatrix des SEWP):

$$\bar{\delta}^2_{stoch} = sp(\boldsymbol{\Lambda}) \text{ aus SEWP } (\boldsymbol{C}_{uu}^{-1} * \boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch})$$

Diese Eigenwerte zerlegen $\bar{\delta}^2_{stoch}$ quantitativ in einzelne voneinander unabhängige Komponenten, die sich unter Hinzunahme der zugehörigen Eigenvektoren vervollständigen und so über eine qualitative Aussage geometrisch interpretierbar werden.

Ferner lässt sich die Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}$ auch anhand eines AEWP mit

$\boldsymbol{\Lambda}$ = Spektralmatrix des AEWP

darstellen, da sich die Eigenwerte beim Übergang auf das AEWP mit $\boldsymbol{C}_{uu}$ als Referenzmatrix und $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}$ als Vergleichsmatrix nach ZURMÜHL & FALK (1984) nicht verändern:

$$\bar{\delta}^2_{stoch} = sp(\boldsymbol{\Lambda}) \text{ aus AEWP (Vergleichsmatrix } \boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}, \text{ Referenzmatrix } \boldsymbol{C}_{uu})$$

Jenes AEWP lässt sich mit den Bezeichnungen

$\boldsymbol{A}$ = zu vergleichende Matrix (Geodäsie: z.B. Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C}_{\nabla u \nabla u' stoch}$)

$\boldsymbol{B}$ = Referenzmatrix (Geodäsie: z.B. Referenzkovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{uu}$)

$\boldsymbol{X}$ = Modalmatrix

λ_i = Eigenwerte bzw. Netzverzerrungswerte des AEWP aus $\boldsymbol{\Lambda}$

$\boldsymbol{x_i}$ = Eigenvektoren des AEWP aus $\boldsymbol{X}$

auch wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x_i} - \lambda_i * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x_i} = 0 \tag{2.4}$$

In Kapitel 2.2.2.3 wird gezeigt, wie sich die Ausgangsmatrizen ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$) anhand von Trägerfunktionen darstellen lassen, welche sich aus den SEWP- und AEWP-Eigenvektoren und Eigenwerten ergeben. Kapitel 2.2.2.4 erklärt die auf jenen Trägerfunktionen basierenden natürlichen und latenten Schwachformen eines geodätischen Netzes, welche in Kapitel 2.2.2.5 auf das spektrale Analysekonzept führen. Die Möglichkeiten jener spektralen Netzanalyse bilden die technische Grundlage für das in Kapitel 6.8 beschriebene Netzanalysekonzept.

2.2.1 Nicht strenge Ausgleichung und deterministische Netzverzerrung

2.2.1.1 Nicht strenge Ausgleichung

Idealerweise erfolgt die Schätzung der unbekannten Parameter $\boldsymbol{x}$ und deren Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ durch die Netzausgleichung erwartungstreu, also ohne den Einfluss netzverzerrender Wirkungen auf die Netzgeometrie und deren Stochastik, welche nachstehende Ursachen haben können und eine nicht strenge Ausgleichung zur Folge hätten:

- Auftreten grober oder systematischer Fehler in den Koordinaten der Anschlusspunkte oder den Netzbeobachtungen.
  Deterministisch-systematische Fehler wirken prinzipiell auf die Netzgeometrie und belasten die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ und so das Fehlerbudget eines (unverzerrten) geodätischen Netzes.
- Vernachlässigung stochastisch bedingter Effekte.
  Stochastisch-systematische Fehler wirken sich auf die Netzgeometrie und deren Stochastik aus und können grundsätzlich alle geodätischen Netzarten betreffen. Es handelt sich hierbei i.d.R. um physikalisch tatsächlich vorhandene aber im stochastischen Modell der Beobachtungen nicht berücksichtigte Korrelationen, welche außerdem die Beobachtungen mit einer zusätzlich zur reinen Messgenauigkeit wirkenden Varianz befrachten. Darüber hinaus stellt auch die Verwendung einer nicht vollständigen, i.d.R. auf die Varianzen beschränkten Kovarianzmatrix der Anschlusspunkte in einer dynamischen Netzausgleichung eine Vernachlässigung in diesem Sinne dar.
  Bei der Anwendung einer hierarchischen anstelle einer dynamischen Ausgleichung handelt es sich ebenfalls um eine Vernachlässigung, weil damit das gesamte stochastische Modell der dynamischen Anschlusspunkte gleich Null gesetzt wird.

- Beschränkung auf die Fehlertheorie 1. Ordnung für die Ermittlung der $\boldsymbol{C_{xx}}$-Kovarianzmatrix.
  Dieser Aspekt wirkt sich sowohl stochastisch als auch auf die Netzgeometrie aus und betrifft prinzipiell keine eindimensionalen Netze (z.B. Nivellementnetze), da deren funktionales Modell auf bereits linearen Verbesserungsgleichungen beruht und nicht über Linearisierungen und den damit verbundenen Unschärfen durch den Abbruch einer Reihenentwicklung herbei geführt werden muss.
  Die auslösende Fehlerart kann auch als *quasi-systematisch* bezeichnet werden.

Die vorgenannten Ursachen müssen in der Praxis häufig in Betracht gezogen werden, da Auswerteprogramme für geodätische Netzausgleichungen die Varianzanteile aus der Fehlertheorie 2. Ordnung bisher nicht berücksichtigen und mehrheitlich zur Verarbeitung von Korrelationen und Kovarianzen des Beobachtungsraumes ungeeignet sind, die außerdem über spezielle Modelle und deren Kovarianzfunktionen aufwändig bereit gestellt werden müssen (BAARDA 1973, FAWAZ 1981).

Dabei führen Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen in doppelter Hinsicht auf eine nicht exakte Schätzung der Parameterstochastik:

Zunächst resultiert aus der grundlegenden Beziehung $\boldsymbol{C_{xx}} = \left(\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_{ll}}^{-1} * \boldsymbol{A}\right)^{-1}$ eine zu günstige Parameterstochastik $\boldsymbol{C_{xx}}$, falls das stochastische Modell der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$ zu günstig angenommen wurde und umgekehrt eine zu pessimistische Parameterstochastik für den Fall eines zu pessimistisch angenommenen Modells $\boldsymbol{C_{ll}}$. Außerdem ergibt sich stets eine zu ungünstige Schätzung der Stochastik der Parameter, falls diese gemäß Beziehung (2.29b) ($\boldsymbol{C_{xx}} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{C_{ll}} * \boldsymbol{F}^T$) anhand eines nicht exakten Modells $\boldsymbol{C_{ll}}$ im Matrizenprodukt $\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_{ll}}^{-1} * \boldsymbol{A}\right)^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_{ll}}^{-1}$ erfolgt, unabhängig davon, ob das stochastische Modell der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$ zu optimistisch oder zu pessimistisch eingeführt wurde, also die Vernachlässigungen $\boldsymbol{\Delta C_{ll}}$ für $\boldsymbol{C_{ll}}$ positiv oder negativ wirken.

Zur Beweisführung der stets günstigsten Parameterstochastik einer strengen Ausgleichung mit einem strengen stochastischen Modell der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}} + \boldsymbol{\Delta C_{ll}}$ im Matrizenprodukt $\boldsymbol{F}$ der Zielformel (2.29b) im Vergleich zu einer nicht strengen Ausgleichung mit einem vernachlässigtem stochastischen Modell $\boldsymbol{C_{ll}}$ in $\boldsymbol{F}$ sei unter der Annahme der tatsächlichen Beobachtungsstochastik $\boldsymbol{C_{ll}} + \boldsymbol{\Delta C_{ll}}$ diese als Multiplikand der symmetrischen Produktbildung in (2.29b) eingeführt. Die sich zwischen strenger und nicht strenger Ausgleichung ergebende Differenzmatrix der zugehörigen Parameterstochastiken ergibt sich nach Varianzenfortpflanzungsgesetz als die quadratische Form der (eindimensionalen) Differenz $\boldsymbol{\sigma_{x_d}} = \left(\boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} - \boldsymbol{F}_{C_{ll}}\right) * \boldsymbol{\sigma_{l+\Delta l}}$ (2.28) zu

$$\boldsymbol{C_{dd}} =$$

$$= \left(\boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} - \boldsymbol{F}_{C_{ll}}\right) * \left(\boldsymbol{C_{ll}} + \Delta\boldsymbol{C_{ll}}\right) * \left(\boldsymbol{F}^T_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} - \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}\right)$$

$$= \boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} * \left(\boldsymbol{C_{ll}} + \Delta\boldsymbol{C_{ll}}\right) * \boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} - \boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} * \left(\boldsymbol{C_{ll}} + \Delta\boldsymbol{C_{ll}}\right) * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}$$

$$-\boldsymbol{F}_{C_{ll}} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}+\Delta C_{ll}} + \boldsymbol{F}_{C_{ll}} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}$$

$$= (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A}$$
$$* (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$-(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A}$$
$$* (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$-(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A}$$
$$* (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$+(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * (\boldsymbol{C}_{ll} + \Delta\boldsymbol{C}_{ll}) * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$-(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A}) * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$-(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A}) * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$+(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{C}_{ll} * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$+(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \Delta\boldsymbol{C}_{ll} * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A} * (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} - (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} - (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$+\boldsymbol{F}_{C_{ll}} * \boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}} + +\boldsymbol{F}_{C_{ll}} * \Delta\boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}$$

$$= -(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} + \boldsymbol{C}_{xx} + \boldsymbol{F}_{C_{ll}} * \Delta\boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}$$

$$\boldsymbol{C}_{dd} = \boldsymbol{C}_{xx} + \boldsymbol{F}_{C_{ll}} * \Delta\boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}} - (\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$$

Die Differenzmatrix $\boldsymbol{C}_{dd}$ der Parameterstochastiken beider Ausgleichungstypen ist die Differenz aus der auf ein strenges stochastisches Modell der Beobachtungen bezogenen konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter $\left(\boldsymbol{C}_{xx} + \boldsymbol{F}_{C_{ll}} * \Delta\boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{F}^T_{C_{ll}}\right)$ und der auf dasselbe Beobachtungsmodell bezogenen Parameterkovarianzmatrix der strengen Ausgleichung $(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$. Matrix $\boldsymbol{C}_{dd}$ folgt gemäß dem oben gewählten Ansatz dem Bildungsgesetz für geodätische Parameterkovarianzmatrizen und ist daher positiv (semi-) definit. Dies führt auf der rechten Gleichungsseite von $\boldsymbol{C}_{dd}$ zu einer stets positiven Differenz und somit zu einer gegenüber der nicht strengen Ausgleichung stets kleineren und daher optimal günstig geschätzten strengen Parameterkovarianzmatrix $(\boldsymbol{A}^T * (\boldsymbol{C}_{ll} + \boldsymbol{\Delta C}_{ll})^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1}$. Das Vorzeichen von $\boldsymbol{\Delta C}_{ll}$ ist diesbezüglich erkennbar ohne Bedeutung. Wegen der im Ansatz für die Entwicklung von $\boldsymbol{C}_{dd}$ auftretenden quadratischen Form ist das Vorzeichen der darin vorgenommenen Differenzbildung zwischen $\boldsymbol{F}_{C_{ll}+\Delta C_{ll}}$ und $\boldsymbol{F}_{C_{ll}}$ ebenfalls bedeutungslos.

Diese parameterbezogene stochastische Wirkung $\boldsymbol{C_{dd}}$ einer nicht strengen Ausgleichung lässt sich im Sinne des Kovarianzmatrixzuschlags $\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$ der stochastisch bedingten Störparameter in (2.3) zur Ermittlung der (verallgemeinerten) Netzverzerrung interpretieren und im Kontext mit Aussagen über latente Netzschwachformen als Vergleichskovarianzmatrix $\boldsymbol{A}$ in die Beziehungen (2.4) und (2.8) bis (2.13) zur Bezugnahme auf eine Referenzkovarianzmatrix $\boldsymbol{B}$ in ein AEWP einführen.

2.2.1.2 Deterministische Netzverzerrung und Zusatzparameterschlupf

Die verallgemeinerte stochastische Netzverzerrung stellt also eine Maßzahl für die Abweichung einer nicht strengen von einer strengen Ausgleichungslösung dar, skaliert im Schrittmaß der Varianzen der Parameter aus der strengen Lösung. Aus der stochastischen Netzverzerrung als quadratische Form $\bar{\delta}^2$ ergibt sich die zugehörige deterministische Netzverzerrung als deren einfache, nicht-quadratische Form $\bar{\delta}$, da $\bar{\delta}^2$ infolge der Theorie zur Fortpflanzung nicht-zufälliger Fehleranteile Erwartungswerteigenschaft für die adäquate deterministische Größe $\bar{\delta}$ gemäß (2.25c) mit skalarwertigem $\nabla = \bar{\delta}$ hat. Die Bedeutung der deterministischen Netzverzerrung lässt sich über die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung (FÖRSTNER 1979) zeigen, die für die beliebige Funktion der Parameter $\varphi(u)$ gemäß

$$\bar{\delta} * \sigma_{\varphi} \geq \nabla\varphi(u) \tag{2.5a}$$

eine Obergrenze der Verfälschung von $\varphi(u)$ bzw. ihrer geometrischen Verzerrungswirkung $\nabla\varphi(u)$ unter dem Einfluss der deterministisch induzierten Modellstörung liefert (JÄGER et al. 2005).

Für die stochastische Netzverzerrung als quadratische Form $\bar{\delta}^2$ gilt diese Eigenschaft entsprechend:

$$\bar{\delta}^2_{stoch} * \sigma^2_{\varphi} \geq \sigma^2_{\varphi(\nabla u)} \tag{2.5b}$$

Für die Betrachtungen dieser Arbeit sei die Referenzkovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{uu}}$ zwar die (strenge) Kovarianzmatrix der Parameter des untersuchten geodätischen Netzes, jedoch generell beschränkt auf die Submatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$, welche die Varianzen und Kovarianzen der Netzkoordinaten enthält.

Im diskreten Fall gilt nach (JÄGER et al. 2005) außerdem für die stochastische Netzverzerrung $\bar{\delta}'^2_{stoch}$ die formale Partitionierung

$$\bar{\delta}'^2_{stoch} = \bar{\delta}'^2_{u} = \bar{\delta}'^2_{x} + u^2_z \tag{2.6}$$

mit den stochastischen quadratischen Netzverzerrungen

$\bar{\delta}'^2_{u}$ = der Gesamtheit aller Parameter

$\bar{\delta}'^2_{x}$ = der Netzkoordinaten

sowie dem keine Verzerrung im eigentlichen Sinne darstellenden

u_z^2 = Schlupfanteil der Zusatzparameter

Die einfache Form des auf die Zusatzparameter bezogenen Anteils u_z heißt nach JÄGER et al. (2005) *Zusatzparameterschlupf* und lässt sich in der quadratischen Form u_z^2 gemäß BILL & JÄGER (1986), HAHN & JÄGER (1987) und KLEIN (1999) wie folgt berechnen:

$$u_z^2 = \frac{\boldsymbol{\nabla z_{stoch}}^T * \boldsymbol{B_Z^T} * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{A_z} * \left(\boldsymbol{A_Z^T} * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{A_z}\right)^{-1} * \boldsymbol{A_Z^T} * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{B_Z} * \boldsymbol{\nabla z_{stoch}}}{\sigma_0^2} \tag{2.7}$$

mit dem auf $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ bezogenen Subvektor

$\boldsymbol{\nabla z_{stoch}}$ = Vektor der auf die Zusatzparameter *z* wirkenden, stochastisch bedingten Störparameter

und der Submatrix der Designmatrix $\boldsymbol{B}$ zur Umformung von Störparametern in den Beobachtungsraum

$\boldsymbol{B_Z}$ = auf die Zusatzparameter *z* bezogene Designmatrix zur Umformung von Störparametern

Dabei gilt für jene Umformung von Störparametern $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ in den Beobachtungsraum die Beziehung

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla l} = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}} \tag{2.8a}$$

Beziehung (2.8a) lautet auf die Zusatzparameter bezogen:

$$\boldsymbol{\nabla_Z} = \boldsymbol{\nabla l_Z} = \boldsymbol{B_Z} * \boldsymbol{\nabla z_{stoch}} \tag{2.8b}$$

Der Zusatzparameterschlupf u_z hat für die Belange der Analysen dieser Arbeit keine weitere Bedeutung.

2.2.2 Allgemeines Eigenwertproblem (AEWP)

2.2.2.1 Numerische Lösung zur Ermittlung der Eigenwerte in Abhängigkeit der Eigenvektoren

In der allgemein üblichen Form werden die Eigenvektoren als sog. Rechtseigenvektoren verwendet; die dazu äquivalente Form mit Verwendung von Linkseigenvektoren $\boldsymbol{x_i}$ lautet:

$$\boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{A} - \boldsymbol{x_i^T} * \lambda_i * \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{A} = \boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{B} * \lambda_i$$
$$\boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x_i} * \lambda_i$$

Dies führt auf den im Zuge der sog. *simultanen Diagonalisierung* wichtigen *Rayleigh-Quotienten*, hier im Zusammenhang mit dem AEWP (DANKERT & DANKERT 2011, PHANI & ADHIKARI 2008):

$$\frac{\boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{x_i^T} * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x_i}} = \lambda_i \tag{2.9a}$$

2.2.2.2 Simultane Diagonalisierung und Kovarianzmatrixvergleich

Die simultane Diagonalisierung dient unter anderem der Verprobung berechneter Eigenvektoren und nutzt dabei den Rayleigh-Quotienten unter Verwendung folgender Überlegung:

Gleichung (2.4) geht bei Verwendung der identischen Matrix $\boldsymbol{I}$ (Einheitsmatrix) als Referenzmatrix $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I})$ in das spezielle Eigenwertproblem (EWP) über, das sich dann schreiben lässt als

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x_i} - \lambda_i * \boldsymbol{I} * \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0}$$

bzw.

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x_i} - \lambda_i * \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0} \tag{2.10}$$

Der Rayleigh-Quotient überführt sich in diesem Falle in die Form

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{I} * \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{x}} \tag{2.11}$$

Zur quantitativen Bemaßung der Verzerrung des Matrixprüflings $\boldsymbol{A}$ in Bezug zur Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ als Referenzmatrix – betrachtet als spezielles EWP von $\boldsymbol{A}$, da $(\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I})$ – dienen aber ausschließlich die Eigenwerte λ; in jenem Zusammenhang sind die Eigenwerte somit als Verzerrungswerte anzusehen.

Ergänzend stellen die Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$ ausschließlich das qualitative Verzerrungsmerkmal dar und ergeben sich im speziellen EWP stets als Einheitsvektoren, so dass die richtige absolute Größe der vollständigen Verzerrungskomponenten durch skalare Multiplikation der Eigenvektoren mit den zugehörigen Eigenwerten λ erhalten wird.
Die Einheitsvektoreneigenschaft der Eigenvektoren im speziellen EWP folgt aus dessen Definition, die in der Form nach Gleichung (2.10) für eine betrachtete Matrix $\boldsymbol{A}$ nur mit Einführung einer zusätzlichen Bedingung – hier die Normierungsbedingung für die Eigenvektoren als Einheitsvektoren – eine eindeutige Lösungsmenge $L = \{\boldsymbol{X_A}, \boldsymbol{\Lambda_A}\}$ liefert.
Für den Nenner des Rayleigh-Quotienten als euklidische Norm jedes Eigenvektors gilt so $\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{x} = 1$ bzw. $\boldsymbol{X}^T * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ und wegen $\boldsymbol{X}^{-1} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ auch $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}^{-1}$ im speziellen EWP. $\boldsymbol{X}$ ist also orthogonal.

Eine Rück-Übertragung dieser Überlegungen auf das allgemeine EWP muss berücksichtigen, dass in diesem Falle der Matrixprüfling $\boldsymbol{A}$ nicht gegen die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ sondern gegen eine beliebige Matrix $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{I}$ als Referenzmatrix abgeglichen wird.

Die zugehörige Normierungsbedingung geht daher von der Form $\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{x} = 1$ des speziellen EWP über in die Form $\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x} = 1$ des allgemeinen EWP mit Matrix $\boldsymbol{B}$ anstelle Matrix $\boldsymbol{I}$.
Im Rayleigh-Quotienten ergibt sich somit:

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}}{1} = \boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x}$$

Die simultane Diagonalisierung wird daher durch folgende Aussagen gebildet (BRÖCKER 2004):

1. $\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{x} = 1$ bzw. $\boldsymbol{X}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$(→ Rechenprobe für die Eigenvektoren) (2.12)
2. $\boldsymbol{x}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} = \lambda$ bzw. $\boldsymbol{X}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}$ (2.13)

Die simultane Diagonalisierung kann darüber hinaus für den Vergleich zweier Kovarianzmatrizen verwendet werden. Fragestellungen dieser Art spielen z.B. in der Ingenieurvermessung eine Rolle, wenn eine parameterbezogene Kovarianzmatrix, welche die tatsächlichen Verhältnisse angibt oder sich auf einen Netzentwurf bezieht (*tatsächliche* Kovarianzmatrix), auf die Einhaltung vorgegebener Parameterstochastiken, die anhand einer sog. Kriteriummatrix (*künstliche* Kovarianzmatrix) vorliegen, geprüft werden soll.

Dazu führen NIEMEIER & ZIEGERT (1983) zunächst einen beliebigen Funktionsvektor $\boldsymbol{f}$ der Parameter $\boldsymbol{u}$ nach $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{u}$ ein und gehen über auf die gemäß Varianzenfortpflanzungsgesetz resultierende und auf die Referenzkovarianzmatrix $\boldsymbol{B}$ bezogene Varianz $\sigma_\varphi^2 = \boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{C_{uu}} * \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{f} = \sigma_{\varphi_B}^2$. Derselbe Ansatz lautet auf die zu vergleichende Kovarianzmatrix $\boldsymbol{A}$ bezogen: $\sigma_{\varphi_A}^2 = \boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{f}$. Wird nun Matrix $\boldsymbol{B}$ als eine *tatsächliche* Kovarianzmatrix und Matrix $\boldsymbol{A}$ als eine *künstliche* Kovarianzmatrix interpretiert, so ist ein Vergleich beider Matrizen anhand des Quotienten beider quadratischer Formen gemäß $\frac{\sigma_{\varphi_A}^2}{\sigma_{\varphi_B}^2} = \frac{\boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{f}}{\boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{f}}$ möglich und führt dabei über formale Analogien auf den Rayleigh-Quotienten gemäß Beziehung (2.9a), aber in diesem Falle mit beliebigen Funktionsvektor $\boldsymbol{f}$ anstelle eines Eigenvektors $\boldsymbol{x_i}$ aus dem AEWP. Nach VAN MIERLO (1982) gilt mit Einführung der AEWP-Eigenwerte λ_i:

$$\lambda_{min} \leq \frac{\boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{f}}{\boldsymbol{f}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{f}} \leq \lambda_{max} \tag{2.9b}$$

Die tatsächliche Kovarianzmatrix $\boldsymbol{B}$ ist folglich als besser oder genauer im Vergleich zur künstlichen Kovarianzmatrix $\boldsymbol{A}$ und somit die Genauigkeitsvorgaben jener Kriteriummatrix als erfüllt anzusehen, falls $\lambda_{min} > 1$.
Auf diese Weise reduziert sich der Vergleich zweier Kovarianzmatrizen ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) auf den Vergleich der beiden Skalare $\sigma_{\varphi_A}^2$ und $\sigma_{\varphi_B}^2$.

2.2.2.3 Darstellung der Ausgangsmatrizen ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$) mit Trägerfunktionen aus ($\boldsymbol{\lambda_i}, \boldsymbol{x_i}$)

Es soll eine Möglichkeit gefunden werden, die Ausgangsmatrizen ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) des AEWP mit geeigneten Trägerfunktionen darzustellen. Dafür lässt sich Gleichung (2.13) zunächst umformen zu:

$\boldsymbol{X}^T * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}$

$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^T)^{-1} * \boldsymbol{\Lambda}$

$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}^{-1})^T * \boldsymbol{\Lambda} * \boldsymbol{X}^{-1}$

Mit

$$\overline{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{X}^{-1})^T \tag{2.14}$$

erhält man

$$\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{X}} * \boldsymbol{\Lambda} * \overline{\boldsymbol{X}}^T \tag{2.15a}$$

bzw. in Summenschreibweise

$$\boldsymbol{A} = \sum_{1}^{u} \left(\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} * \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}^T * \lambda_i\right) \tag{2.15b}$$

Analog ergibt sich aus (2.12):

$\boldsymbol{X}^T * \boldsymbol{B} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{B} * \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^T)^{-1} * \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{X}^{-1})^T * \boldsymbol{I} * \boldsymbol{X}^{-1}$

Mit (2.14) erhält man

$$\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{X}} * \overline{\boldsymbol{X}}^T \tag{2.16a}$$

bzw. in Summenschreibweise

$$\boldsymbol{B} = \sum_{1}^{u} \left(\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} * \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}^T\right) \tag{2.16b}$$

Trägerfunktionen zur Darstellung der Ausgangsmatrizen ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$) in Summenschreibweise sind die Vektoren $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$, die sich aus der inversen Eigenvektormatrix (Modalmatrix) $(\boldsymbol{X}^{-1})^T$ des allgemeinen EWP berechnen und so nicht mit den originären Eigenvektoren des allgemeinen EWP identisch sind.

Es lässt sich ferner nachweisen, dass sich diese Trägerfunktionen als Funktion der Eigenwerte $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{B}}$ und Eigenvektoren $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{B}}$ des speziellen Eigenwertproblems von $\boldsymbol{B}$ gemäß

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{B}} * \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{B}} * \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{B}}^T \tag{2.17}$$

sowie der Eigenvektoren $\boldsymbol{X}$ des allgemeinen Eigenwertproblems von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zu

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B} * \boldsymbol{X} \tag{2.18}$$

darstellen lassen. Die Trägerfunktionen lassen sich also nicht ausschließlich als Funktion der Eigenwerte und Eigenvektoren des speziellen Eigenwertproblems von $\boldsymbol{B}$ darstellen.

2.2.2.4 Natürliche und latente Schwachformen

Natürliche Schwachformen:

Das natürliche stochastische Budget eines geodätischen Netzes beruht auf den ausschließlich zufällig wirkenden Varianzanteilen $\boldsymbol{\varepsilon}$ der Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ und lässt sich auf die Parameter bezogen darstellen als deren konventionelle Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{uu}}, \boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. als die Submatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ der Netzkoordinaten. Im Sinne einer geodätischen Kovarianzmatrix ist $\boldsymbol{C_{xx}}$ quadratisch und symmetrisch und lässt sich daher anhand des speziellen Eigenwertproblems (SEWP) in die Summenform (2.15b) – mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C_{xx}}$ und den Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$ auf das SEWP von $\boldsymbol{A}$ bezogen – spektral zerlegen. Dabei sind alle Summanden aus (2.15b) voneinander unabhängige Kovarianzmatrizen, von denen jede für sich einen individuellen Anteil des natürlichen stochastischen Budgets der Netzkoordinaten enthält.

Die natürlichen Schwachformen ergeben sich anhand der die Metrik tragenden Eigenwerte λ_i aus dem auf die $\boldsymbol{C_{xx}}$-Matrix angewendeten SEWP sowie anhand der aus dem SEWP außerdem resultierenden dimensionslosen und orthonormalen (NIEMEIER 2008) Eigenvektoren $\boldsymbol{x_i}$, welche formgebend wirken. Zur Erzielung von $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$ ist die Wandlung der originären Eigenvektoren $\boldsymbol{x_i}$ des SEWP nach Beziehung (2.14) entbehrlich, da $\boldsymbol{X}$ im SEWP orthogonal und so $\overline{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{X}^{-1})^T = (\boldsymbol{X}^T)^T = \boldsymbol{X}$. Alternativ ist dieselbe Lösungsmenge $L = \{\lambda_i, \boldsymbol{x_i}\}$ auch aus dem AEWP erzielbar, falls dort die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ als Referenzmatrix $\boldsymbol{B}$, also $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, eingeführt wird. Somit bildet die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ formal die Referenzmatrix für die natürlichen Schwachformen.

Auf diese Weise stellt jede natürliche Schwachform also auch eine geometrische Komponente dar, die verzerrend auf eine idealisiert angenommene varianz- und so auch widerspruchsfreie Netzlösung wirkt und infolgedessen als gleich wahrscheinliche Formabweichungskomponente zwischen Soll- und Ist-Geometrie gemäß Jäger et al. (2005) eingeführt werden kann zu

$$\boldsymbol{\nabla_i} =: c_i * \sqrt{\lambda_i} * \boldsymbol{m_i} \tag{2.19}$$

mit

c_i = Stochastisch unabhängige, N(0,1)-verteilte Zufallsvariable $\left(= \mathrm{N}\left(0, \sigma_i^2 = 1\right)\right)$

λ_i = Eigenwert von $\boldsymbol{C_{uu}}$ bzw. $\boldsymbol{C_{xx}}$

$\boldsymbol{m_i}$ = $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$ ($|\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}| = 1$) als Trägerfunktion der spektralen Anteile

Es ist zu beachten, dass sich alle Komponenten einer natürlichen Schwachform $\boldsymbol{\nabla_i}$ gemäß Beziehung (2.19) vorzeichengerecht ergeben und somit zwar die Schwachform $\boldsymbol{\nabla_i}$ im Ganzen, also für alle ihre

Komponenten, auch mit umgekehrtem Vorzeichen angegeben werden kann, nicht aber nur teilweise. Auf nur einzelne Komponenten bezogene Vorzeichenwechsel sind somit nicht zulässig.

Latente Schwachformen:

Grundlage der latenten Schwachformen sind systematisch wirkende Varianz- und Fehleranteile der Beobachtungen $\boldsymbol{l}$, welche deren stochastisches Modell der ausschließlich zufällig wirkenden Varianzanteile $\boldsymbol{C_\varepsilon}$ mit zusätzlichen Varianzanteilen und Kovarianzen befrachten und sich ihrer Ursache nach in stochastisch-systematische Anteile δ (z.B. Zentrierfehler der optischen Lote) und deterministisch-systematische Anteile ∇ (z.B. falscher EDM-Maßstabsfaktor) einteilen lassen. Darüber hinaus werden latente Schwachformen auch von den als *quasi-systematisch* zu bezeichnenden Fehleranteilen (siehe Kapitel 5) verursacht, die auf der Vernachlässigung von Anteilen ab der 2. Ordnung im Rahmen der Linearisierung von Funktionen $x = f(l)$ beruhen.

Jene Kovarianzen und zusätzliche Varianzanteile bilden gemeinsam mit dem auf zufällig wirkende Varianzanteile beschränkten Modell $\boldsymbol{C_\varepsilon}$ das vollständige und somit wahre stochastische Modell der Beobachtungen $\boldsymbol{C_l}$, welches daher auf die wahre Kovarianzmatrix der Parameter führt. Der zur sich auf ε-Anteile beschränkenden (konventionellen) Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}$ bestehende Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_b}$ stellt die stochastische Komponente der latenten Schwachformen dar und weist in seinen Varianzen meistens eine geringere Größenordnung als die Varianzen aus $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}$ auf, obwohl der umgekehrte Fall ebenfalls möglich ist (Nivellementnetz *Testschleife Koblenz*, s. Kapitel 3.3.6).

Die zugehörigen geometrischen Komponenten ergeben sich unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}$ als Referenzkovarianzmatrix und mit $\boldsymbol{C_b}$ ($\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$) als Vergleichskovarianzmatrix gemäß AEWP mit

λ_i = dimensionsloser Eigenwert aus dem AEWP

$\boldsymbol{m_i}$ = $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$ als Trägerfunktion der spektralen Anteile

wie folgt

$$\boldsymbol{\nabla_i} =: \sqrt{\lambda_i} * \boldsymbol{m_i} \tag{2.20}$$

Zur Ermittlung der die Metrik tragenden Trägerfunktionen $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}$ sind zuvor die originären Eigenvektoren $\boldsymbol{x_i}$ des allgemeinen EWP gemäß (2.14) umzuwandeln.
Jene geometrischen Komponenten sind die latenten Schwachformen im eigentlichen Sinne, wirken auf die sich auf ε-Anteile beschränkende ausgeglichene Netzgeometrie verzerrend und stellen so latente Geometriedefizite im stochastischen Modell der Beobachtungen dar. Dabei wachsen die Beträge jener Verzerrungen mit der Größe der systematisch wirkenden Varianz- und Fehleranteile, deren genaue Art wiederum die Richtungen der Verzerrungen beeinflusst.

Somit bildet die konventionelle Parameterkovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon}$ die Referenzmatrix für die latenten Schwachformen. Den Aussagen zu den natürlichen Schwachformen und aus Kapitel 2.2.2.6 folgend ergibt sich demnach der Analogieschluß, dass auch für die natürlichen Schwachformen formal eine Referenzmatrix, nämlich die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$, existiert. Der Übergang zwischen den natürlichen und den latenten Schwachformen erfolgt also neben der Betrachtung unterschiedlicher stochastischer Vergleichssituationen auch mit der Einführung verschiedener stochastischer Referenzsituationen.

2.2.2.5 Hauptschwachform und spektrales Analysekonzept

Die Darstellung der Ausgangsmatrizen (insbesondere Vergleichsmatrix $\boldsymbol{A}$ als z.B. Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$) in der Summenschreibweise von (2.15b) führt auf das spektrale Analysekonzept der Schwachformen einer nicht strengen Ausgleichung.
So ergeben sich die natürlichen Schwachformen aus der Anwendung des speziellen EWP auf die konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{uu}}$ bzw. auf deren Submatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ der Netzkoordinaten.
Die latenten Schwachformen werden hingegen aus der Anwendung des allgemeinen EWP mit $\boldsymbol{C_{uu}}$ als Referenz- und des Kovarianzmatrixzuschlags $\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$ der stochastisch bedingten Störparameter als Vergleichskovarianzmatrix erhalten. Siehe dazu jeweils auch das Kapitel 2.2.2.4.

Bei den natürlichen und latenten Schwachformen ist hauptsächlich die zum maximalen Eigenwert λ_{max} und seinem Eigenvektor $\boldsymbol{m_{max}}$ gehörende sog. *Hauptschwachform* von Bedeutung, die sich als Hauptkomponente oder *Principal Component* (NIEMEIER 1982) nach JÄGER et al. (2005) ergibt zu

$$\boldsymbol{\nabla_{max}} = \sqrt{\lambda_{max}} * \boldsymbol{m_{max}} \tag{2.21}$$

und im Falle eines die Netzverzerrung dominierenden maximalen Eigenwertes λ_{max} auch die Summe aller (stochastisch bedingten) Schwachformen als Residuen zwischen Soll- und Ist-Form dominiert, wie es für langgestreckte geodätische Netze typisch ist. Nachgeordnete Schwachformen werden dann bedeutungslos.

Spektrale Analysekonzepte dienen der Untersuchung der Netzqualität bei gegebenem Netzdesign und stochastischem Modell der Beobachtungskomponenten; ohne Beteiligung echter Beobachtungswerte kommt dabei das Verfahren der Netzplanung oder Genauigkeitsvorbetrachtung zum Zuge. Es besteht somit die Möglichkeit einer allgemeinen spektralen Netzoptimierung auf Basis der spektralen Netzanalysekriterien wie Bilanzierung und Hierarchie von Eigenwerten und zugehörigen Schwachformen.

2.2.2.6 Interpretation des Eigenwertspektrums aus dem AEWP

Grundsätzlich lässt sich der Unterschied im stochastischen Verhalten der Neupunkte eines geodätischen Netzes zwischen der Wirkung zufälliger und systematischer Fehleranteile über das Eigenwertspektrum des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) indizieren:

Dazu sei zunächst das Eigenwertspektrum des speziellen Eigenwertproblems (SEWP) der Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{A}$ für den konventionellen Ansatz betrachtet, das im Falle einer einheitlichen Stochastik weitgehend unkorrelierter Netzpunkte auf Eigenwerte gleicher Größenordnung führt, sich also homogen ausbildet:

$$\text{Spektralmatrix } \boldsymbol{\Lambda_A} \text{ aus SEWP(Matrix } \boldsymbol{A}) \approx \text{Einheitsmatrix } \boldsymbol{I}$$

Ein deutliches Gefälle innerhalb der Größenordnung der Neupunktgenauigkeiten führt hingegen wie Korrelationen zwischen diesen Netzpunkten zur Bildung eines steilen Verlaufes der nach absteigender Größe sortierten Eigenwerte des SEWP. Aufgrund der Äquivalenz des SEWP zum AEWP – mit der Einheitsmatrix als Referenzmatrix – kann die Steilheit des SEWP-Eigenwertspektrums als Grad der Abweichung der konkreten Netzstochastik vom Idealfall der durch die Einheitsmatrix repräsentierten, vollständig homogenen Netzstochastik vollständig unkorrelierter Neupunkte angesehen werden:

$$\text{Spektralmatrix } \boldsymbol{\Lambda_A} \text{ aus SEWP(Matrix } \boldsymbol{A})$$
$$=$$
$$\text{Spektralmatrix } \boldsymbol{\Lambda} \text{ aus AEWP(Vergleichsmatrix } \boldsymbol{A}\text{, Referenzmatrix } \boldsymbol{I})$$

Diese Überlegung lässt sich auf die Gegenüberstellung der Netzstochastiken übertragen, wie sie sich jeweils aus den zufälligen oder systematischen Varianzanteilen ergeben, indem formal die Einheitsmatrix als Referenzmatrix durch die Kovarianzmatrix der Parameter nach dem konventionellen Ansatz ($\boldsymbol{B}$) und die zuvor im SEWP betrachtete und gegen die Einheitsmatrix abgeglichene Kovarianzmatrix $\boldsymbol{A}$ durch den Kovarianzmatrixzuschlag ersetzt wird, der sich durch die zusätzliche Modellierung systematischer Fehleranteile für die Stochastik der Neupunkte ergibt. In Fortführung dieser Analogie tritt an die Stelle des zuvor betrachteten SEWP-Eigenwertspektrums das Eigenwertspektrum aus dem AEWP, dessen Steilheit nunmehr den Grad der Abweichung zwischen der durch systematische oder zufällige Varianzanteile bedingten Netzstochastik angibt:

$$\text{Spektralmatrix } \boldsymbol{\Lambda} \text{ aus AEWP(Vergleichsmatrix } \boldsymbol{A}\text{, Referenzmatrix } \boldsymbol{B})$$

Dabei kann die Verifizierung der Steilheit des (sortierten) AEWP-Eigenwertspektrums über den (prozentualen) Anteil (als Mächtigkeit) des ersten (und damit größten) Eigenwertes an der Summe aller Eigenwerte, welche die sogenannte Netzverzerrung darstellt, erfolgen, falls dieser Anteil 50 % der Netzverzerrung überschreitet und so die Dominanz der zugehörigen latenten Hauptschwachform anzeigt.
Ein allgemeingültiger Ansatz zur Quantifizierung der Steilheit von Eigenwertspektren ist in Kapitel 2.2.2.7 angegeben.

Im (idealisierten) Falle eines vollständig homogenen AEWP-Eigenwertspektrums bestünde Identität in der inneren Struktur von Vergleichs- und Referenzkovarianzmatrix, die sich per Skalarmultiplikation

mit dem einheitlichen Eigenwert λ auf die Vergleichskovarianzmatrix abbilden ließe; die beiden über ihre jeweilige Kovarianzmatrix in das AEWP eingeführten Stochastiken der Netzpunkte würden sich lediglich in ihrer Größenordnung unterscheiden, aber ebenfalls dieselbe innere Struktur aufweisen:

$$\boldsymbol{A} = \lambda * \boldsymbol{B}$$

Im Umkehrschluss gilt, dass wachsende Unterschiede in der inneren Struktur der beiden anhand des AEWP verglichenen Netzstochastiken zur Vergrößerung der Steilheit des AEWP-Eigenwertspektrums und damit zur Erhöhung der Dominanz der latenten Hauptschwachform führen.

2.2.2.7 Quantifizierung der Steilheit von Eigenwertspektren

Das Spektrum der nach abfallender Größe sortierten Eigenwerte des speziellen Eigenwertproblems liefert anhand seiner Steilheit Aussagen über die Homogenität der Stochastik der Neupunkte und darin enthaltene Korrelationen sowie über langwellig wirkende Fehleranteile in den Netzbeobachtungen. Die Steilheit des Eigenwertspektrums des allgemeinen Eigenwertproblems zeigt hingegen den Grad an Unterscheidung der inneren Struktur der durch zufällige bzw. systematische Varianzanteile indizierten Neupunktstochastiken an. Diese auf die Steilheit von Eigenwertspektren bezogenen Aussagen sind bisher nur tendenziell und in keiner Weise quantifiziert oder objektiviert.

Eine Möglichkeit zur Bemaßung von Steilheitsaussagen besteht in der Betrachtung der für die Steilheit eines Spektrums maßgeblichen Entwicklung der Größenverhältnisse der ersten drei Eigenwerte gemäß ihrer Reihenfolge. Jene Entwicklung ist durch das Standardformelement einer Parabel zweiten Grades

$$y = a * x^2 + b * x + c \tag{2.22}$$

eindeutig beschreibbar, indem die Stützstellen $\boldsymbol{x}$ aus den drei laufenden Nummern dieser Eigenwerte

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 2, \;\; x_3 = 3$$

und die Stützwerte $\boldsymbol{y}$ aus den Eigenwerten selber

$$y_1 = \lambda_1, \;\; y_2 = \lambda_2, \;\; y_3 = \lambda_3$$

gebildet werden. Die unbekannten Koeffizienten dieser Parabel ergeben sich zu

$$a = \frac{y_3 - y_1}{(x_3 - x_1) * (x_3 - x_2)} - \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1) * (x_3 - x_2)}$$

$$a = \frac{y_3 - y_1}{2} - (y_2 - y_1) \tag{2.23a}$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)} - (x_2 + x_1) * a$$

$$b = y_2 - y_1 - 3 * a \tag{2.23b}$$

$c = y_1 - a * x_1^2 - b * x_1$

$$c = y_1 - a - b \tag{2.23c}$$

Als Testgröße für die daraus ableitbare Steilheit des Eigenwertspektrums sei die Tangentensteigung im ersten Eigenwert aussagefähig, welche sich – in ihrer in diesen Zusammenhang ausschließlich interessierenden absoluten Größe – ergibt zu

$$|y_1'(x)| = |f'(x_1)| = |2 * a * x_1 + b| \tag{2.24}$$

und sich in Form eines die Steilheit anzeigenden Parameters beim speziellen Eigenwertproblem auf die innere Struktur der Neupunktstochastik und beim allgemeinen Eigenwertproblem auf die Unterscheidung der inneren Strukturen der auf zufällige bzw. systematische Varianzanteile zurückgehenden Neupunktstochastiken bezieht, jedoch ausweislich ihres Bildungsgesetzes linear von der Größenordnung der Stützwerte abhängig ist. So würde sich für das spezielle Eigenwertproblem – beispielsweise im Falle einer Verdoppelung der Einträge der Kovarianzmatrix – die Testgröße ebenfalls verdoppeln, da sich damit alle Eigenwerte als Stützwerte verdoppelten, obwohl die innere Struktur der betrachteten Kovarianzmatrix unverändert bliebe. Für das allgemeine Eigenwertproblem würden sich im Falle einer Verdoppelung der Einträge der Vergleichskovarianzmatrix bei unveränderter Referenzkovarianzmatrix die Eigenwerte und damit die Testgröße ebenfalls verdoppeln, obwohl sich dadurch keine zusätzlichen strukturellen Änderungen zwischen den durch die beiden beteiligten Matrizen abgebildeten Neupunktstochastiken ergäben. Formal tritt hier die Referenzkovarianzmatrix an die Stelle der ebenfalls unveränderten Einheitsmatrix aus dem speziellen Eigenwertproblem.

Mit der Eigenschaft der Testgröße, für die innere Struktur von Neupunktstochastiken aussagefähig zu sein, erscheint deren Entlastung vom Effekt der absoluten Größenordnung der Eigenwerte jedoch sinnvoll; auf jene Weise würden durch die neue Testgröße gestützte objektive Vergleiche der Steilheit von Eigenwertspektren unterschiedlicher Netze ermöglicht. Diese Entlastung kann grundsätzlich durch die Normierung der Summe der Eigenwerte auf eine einheitliche Größe erfolgen, welche in Anlehnung an die übliche prozentuale Angabe der Mächtigkeit einer (Haupt-) Schwachform an der Netzverzerrung als prozentualer Anteil des größten Eigenwertes an der Summe aller Eigenwerte zweckmäßigerweise auf 100 festgesetzt sei. Anstelle der originären Eigenwerte sind daher deren prozentualen Anteile als Stützwerte $\boldsymbol{y}$ in die vorstehenden Beziehungen einzuführen.

Für das Beispiel der *Testschleife Koblenz* mit einer dominanten natürlichen Hauptschwachform der Mächtigkeit 61.29 % und eines somit steilen Verlaufes des zugehörigen Eigenwertspektrums ergibt sich aus den prozentualen Eigenwerten (1. = 61.29, 2. = 15.32, 3. = 6.81) des auf die konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter angewendeten speziellen Eigenwertproblems eine Steilheit von 64.7; mit Verwendung der originalen Eigenwerte (1. = 0.000048, 2. = 0.000012, 3. = 0.000005) ergibt sich

für die Tangentensteigung hingegen lediglich ein Wert von 0.0000505, der nicht der Vorstellung eines steilen Kurvenverlaufes entspricht.

2.2.3 Stochastische Modellierung nicht-zufälliger Fehlertypen

Die deterministisch-systematischen Fehleranteile ∇ sind meistens zeitabhängig. Obwohl sie dabei nicht stochastischer Natur sind, vergrößert ihr Einfluss das Fehlerbudget einer Beobachtung l und somit auch die resultierende Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}}$ gegenüber ihrer auf die zufälligen Fehleranteile ε beschränkten Form $\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon}$ um den Zuschlag $\boldsymbol{C_b}, \nabla$, welcher Gegenstand der folgenden Betrachtungen sein soll (JÄGER & LEINEN 1992).

Zunächst gilt für die Erwartungswerte der zufälligen und nicht-zufälligen Fehleranteile

$$\boldsymbol{C_\varepsilon} = E\{\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} \tag{2.25a}$$

$$\boldsymbol{C_\delta} = E\{\boldsymbol{\delta} * \boldsymbol{\delta}^T\} \tag{2.25b}$$

$$\boldsymbol{C_\nabla} = \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{\nabla}^T \tag{2.25c}$$

und somit für die wahre Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\boldsymbol{C_l} = \boldsymbol{C_\varepsilon} + \boldsymbol{C_\delta} + \boldsymbol{C_\nabla} \tag{2.26}$$

Mit

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} \tag{2.27}$$

ergeben sich nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate die Parameter $\boldsymbol{x}$ aus den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{l} \tag{2.28}$$

und darin $\boldsymbol{F}$ als linearem Transformationsterm zwischen den Beobachtungen und den Parametern.

Für die Ermittlung des Umformungsterms zwischen der Stochastik der Beobachtungen $\boldsymbol{C_\varepsilon}$ und der Stochastik der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon}$ ist zunächst nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate anzusetzen:

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} \tag{2.29a}$$

und dann unter Verwendung der Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ weiter zu entwickeln gemäß

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^T * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^T)^{-1}$$

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^T * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1})^T$$

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A} * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1})^T$$

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{C_\varepsilon} * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A} * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1})^T$$

$$\boldsymbol{C_{xx}}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{C_\varepsilon} * (\boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1})^T * \boldsymbol{A} * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1})^T$$

$$\boldsymbol{C_{xx},\varepsilon} = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{C_\varepsilon} * ((\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{C_\varepsilon}^{-1})^T$$

$$\boldsymbol{C_{xx},\varepsilon} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{C_\varepsilon} * \boldsymbol{F}^T \tag{2.29b}$$

Der Übergang auf jene Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}}$, die nun – abgesehen von der Wirkung der quasi-systematischen Fehler aufgrund der Beschränkung auf die Fehlertheorie 1. Ordnung – als *wahre* Kovarianzmatrix bezeichnet werden kann, gelingt mit (2.26) zu

$$\boldsymbol{C_{xx}} = \boldsymbol{C_{xx},\varepsilon\delta\nabla} = \boldsymbol{F} * (\boldsymbol{C_\varepsilon} + \boldsymbol{C_\delta} + \boldsymbol{C_\nabla}) * \boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{C_{xx},\varepsilon} + \boldsymbol{C_{xx},\delta} + \boldsymbol{C_{xx},\nabla} \tag{2.30}$$

Für den Zuschlag der Kovarianzmatrix der Parameter aufgrund des speziellen Einflusses stochastisch-systematischer Fehler δ gilt:

$$\boldsymbol{C_{xx},\delta} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{C_\delta} * \boldsymbol{F}^T \tag{2.31}$$

Ist $\boldsymbol{C_\delta}$ nach (2.25b) oder aufgrund einer verfügbaren Kovarianzfunktion bekannt, so existiert neben Gleichung (2.31) für die Ermittlung des Kovarianzmatrixzuschlages $\boldsymbol{C_{xx},\delta}$ noch die Möglichkeit, das stochastische Modell der Beobachtungen nacheinander gemäß $\boldsymbol{C_l} = \boldsymbol{C_\varepsilon}$ und gemäß $\boldsymbol{C_l} = \boldsymbol{C_\varepsilon} + \boldsymbol{C_\delta}$ in eine Schätzung nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate einzuführen und dann die Differenz der daraus jeweils resultierenden Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx},\varepsilon}$ und $\boldsymbol{C_{xx},\varepsilon\delta}$ wie folgt zu bilden:
$\boldsymbol{C_{xx},\delta} = \boldsymbol{C_{xx},\varepsilon\delta} - \boldsymbol{C_{xx},\varepsilon}$.
Diese Verfahrensmöglichkeit weist gegenüber der Anwendung von Gleichung (2.31) den Vorteil auf, nicht auf das stochastische Ergebnis (als Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{xx},\delta}$) beschränkt zu sein, sondern ferner das geometrische Ergebnis der ausgeglichenen Netzkoordinaten zu liefern, falls eine Stichprobe mit konkreten Messwerten vorliegt.

Für den gesuchten Zuschlag der Kovarianzmatrix der Parameter aufgrund des speziellen Einflusses deterministisch-systematischer Fehler $\boldsymbol{\nabla}$ gilt analog zur Beziehung (2.31):

$$\boldsymbol{C_{xx},\nabla} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{C_\nabla} * \boldsymbol{F}^T \tag{2.32a}$$

und mit (2.25c):

$$\boldsymbol{C_{xx},\nabla} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla} * \boldsymbol{\nabla}^T * \boldsymbol{F}^T \tag{2.32b}$$

In dieser Form zeigt (2.32b) die Wirkung beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehler $\boldsymbol{\nabla l}$ auf und kann als Zuschlag für die Kovarianzmatrix der Parameter daher auch wie folgt geschrieben werden

$$\boldsymbol{C_{xx},\nabla l} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla l} * \boldsymbol{\nabla l}^T * \boldsymbol{F}^T \tag{2.32c}$$

Für die Darstellung der Wirkung nicht-beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehler $\boldsymbol{\nabla x}$ (wie z.B. falsche Koordinaten eines festen Anschlusspunktes oder einer Satelliten-Orbitposition)

auf die Stochastik der Parameter ist der Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den Punktkoordinaten im funktionalen Modell der Ausgleichung anhand der $\boldsymbol{A}$-Matrix zu berücksichtigen:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\delta l}{\delta x} \tag{2.33}$$

In diesem Zusammenhang werden die Punkte der fehlerhaften Koordinaten $\boldsymbol{\nabla x}$ formal als Neupunkte angesehen und die zugehörige Sub-Matrix $\boldsymbol{A_x}$ von $\boldsymbol{A}$ entsprechend gebildet. Aufgrund des Bildungsgesetzes von (2.33) gilt nun für den Zusammenhang zwischen nicht-beobachtungsbezogenen ($\boldsymbol{\nabla x}$) und beobachtungsbezogenen ($\boldsymbol{\nabla l}$) deterministisch-systematischen Fehlern

$$\boldsymbol{\nabla(\nabla x)} = \boldsymbol{\nabla l} = \boldsymbol{A_x} * \boldsymbol{\nabla x} \tag{2.34}$$

und mit dessen Berücksichtigung als $\boldsymbol{\nabla l}$ in (2.32c)

$$\boldsymbol{C_{xx,}\nabla x} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{A_x} * \boldsymbol{\nabla x} * (\boldsymbol{A_x} * \boldsymbol{\nabla x})^T * \boldsymbol{F}^T$$

und somit für den Zuschlag der Kovarianzmatrix der Parameter aufgrund des Einflusses nicht-beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehler schließlich

$$\boldsymbol{C_{xx,}\nabla x} = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{A_x} * \boldsymbol{\nabla x} * \boldsymbol{\nabla x}^T * \boldsymbol{A_x}^T * \boldsymbol{F}^T \tag{2.35}$$

Die rechte Seite der Gleichung (2.32c) wird durch das dyadische Produkt des (u,1)-Vektors $\boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla l}$ mit sich selbst zu $\boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla l} * \boldsymbol{\nabla l}^T * \boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla l} * (\boldsymbol{F} * \boldsymbol{\nabla l})^T$ gebildet und stellt so eine Rang-1-Matrix dar, die nicht die allgemeinen Eigenschaften einer klassischen statistisch begründeten Kovarianzmatrix hat sondern eher auf einen im Rahmen der Netzverzerrungstheorie zustande kommenden Analogieschluss für parameterbezogene Kovarianzmatrizen beruht. Aufgrund der Rang-1-Eigenschaft des Kovarianzmatrixzuschlags $\boldsymbol{C_{xx,}\nabla l}$ weist das allgemeine EWP mit jenem Zuschlag als Vergleichskovarianzmatrix ebenfalls den Rang 1 auf. Dieselben Kausalitäten gelten für den Zuschlag $\boldsymbol{C_{xx,}\nabla x}$ aus (2.35).

3 Relative Quantifizierung der effektbelasteten Parameterstochastik

Geodätische Netze können über das Budget zufälliger Fehler hinaus noch anhand unterschiedlicher nicht-zufälliger Fehlerarten belastet sein. Die zugehörigen Schätzungen (hier nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate) sind dann nicht mehr erwartungstreu sondern in Form latenter Schwachformen gleichermaßen geometrisch und stochastisch belastet und verzerrt. Die in diesem Kapitel betrachtete stochastische Verzerrung bezieht sich dabei auf die anhand der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter und insbesondere der enthaltenen Varianzen gegebene konventionelle Parameterstochastik.
Dies führt auf die Fragestellung einer geeigneten Quantifizierung der auf jene Parameterstochastik wirkenden Verzerrung als Belastung durch zusätzliche Fehleranteile, welche nicht zufällig sind und auf diese Weise im Sinne eines (die Parameterstochastik belastenden) Effekts auftreten.
Die Quantifizierung dieses als zusätzliche Parameterstochastik interpretierbaren belastenden Effekts soll in diesem Kapitel relativ zur konventionellen Parameterstochastik konzipiert werden.

3.1 Effektbelastende Induktionswirkungen

Tab. (3.1) Übersicht der effektbelastenden Induktionswirkungen in geodätischen Netzen:

Induktion	• Grobe oder systematische Fehler in den Beobachtungen (∇l) oder den Koordinaten (∇x) • Korrelationen im Beobachtungsraum • Korrelationen in der Stochastik der stochastischen Anschlusspunkte • Beobachtungsbezogenes Netzdesign • Netzdesign 0. Ordnung (Nicht vorhandene Anschluss- oder Datumspunkte) • Netzdesign 1. Ordnung (Nicht optimal verteilte Anschluss- oder Datumspunkte)
Wirkung	• Uneinheitliche Größenordnung der Stochastik der einzelnen Parameter • Korrelationen innerhalb der Parameterstochastik, speziell der Stochastik der Netzpunkte • Steiler Verlauf des Eigenwertspektrums des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) • Dominanz der latenten Hauptschwachform • Netzdesensibilisierung in Bezug auf die Aufdeckungsfähigkeit langwelliger Deformationen • Latente Schwachformen als (langwellig wirkende und netzbeherrschende) Belastungen der Parameterstochastik und der Netzgeometrie • Geometrische Instabilität und fehlende Aussteifung des Netzes
Kompensation	• A-Optimalität (allgemeine Minimierung der Netzstochastik mit minimaler Spur von $\boldsymbol{C}_{xx}$) • E-Optimalität (Minimierung des größten Eigenwertes des speziellen Eigenwertproblems (SEWP) von $\boldsymbol{C}_{xx}$) • S-Optimalität (Minimierung der Differenz zwischen größtem und kleinstem Eigenwert des SEWP von $\boldsymbol{C}_{xx}$)

Grundsätzlich lassen sich alle dargestellten induzierenden Momente auf alle dargestellten Wirkungen abbilden; es bestehen ebenso keine speziellen Zuordnungen der dargestellten Kompensationsansätze zu den dargestellten Wirkungen.

3.1 Effektbelastende Induktionswirkungen

3.2 Stochastisches Budget geodätischer Netze

In der Vergangenheit wurde die Bemessung des Fehlerbudgets geodätischer Lage- und Höhennetze im Allgemeinen auf die konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter reduziert, welche neben dem Netzdesign ausschließlich durch die zufälligen, gerätebedingten Varianzanteile induziert wurde.

Das vollständige Fehlerbudget und damit die wahre Stochastik der Netzpunkte umfasst jedoch ferner folgende stochastisch wirksame Momente:

- Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen mit zusätzlichen Anteilen für deren Varianzen und Kovarianzen, z.B. aufgrund des vertikalen Temperaturgradienten im geometrischen Nivellement oder aufgrund von Zentrierfehlern in Lagenetzen, als stochastisch-systematische Fehler (δ-Fehler).
- Bisher stets vernachlässigte Anteile aus der Fehlertheorie 2. und höherer Ordnung, welche ihre Ursache im Falle eines nichtlinearen Zusammenhangs $\boldsymbol{l} = l(\boldsymbol{x})$ zwischen den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$und den Parametern $\boldsymbol{x}$im Abbruch der Taylorreihenentwicklung nach dem 1. Glied haben. In nivellitischen Höhennetzen tritt dieser Effekt aufgrund derer linearen Funktionsgleichungen nicht auf; er kann sich grundsätzlich auch auf die geometrische Netzlösung auswirken.
- Etwaige deterministisch-systematische Fehleranteile in den Koordinaten der Anschlusspunkte oder den Beobachtungen (∇-Fehler).

Ohne Berücksichtigung dieser stochastisch wirksamen Momente erfolgt die Schätzung der Stochastik der Neupunkte auf der Basis ihrer konventionellen Kovarianzmatrix stets zu günstig. Stochastische Verzerrungswirkungen dieser Art bleiben jedoch nicht auf die Netzkoordinaten beschränkt sondern erstrecken sich auch auf mögliche, hier nicht behandelte Zusatzparameter des funktionalen Modells, wie z.B. den Maßstabsfaktor, und bilden in jener Gruppe von Parametern den *Zusatzparameterschlupf* als ihren Anteil an der gesamten stochastischen Netzverzerrung aus (BILL & JÄGER, 1986).
Zum Zusatzparameterschlupf siehe auch Kapitel 2.2.1.2.

Diese drei Vernachlässigungen wirken – jede für sich – belastend auf die konventionelle Stochastik der Neupunkte und stellen somit eine stochastische Effektbelastung dar.

Aus einem Vergleich verschiedener stochastischer Situationen der Neupunkte eines Netzes lässt sich formal ein weiteres stochastisch wirksames Moment ableiten:

- Festlegung einer der beiden beteiligten stochastischen Neupunktsituationen als Referenz- und der anderen Situation als Vergleichszustand und infolgedessen des wirksamen Moments als stochastische Belastung des Referenzzustands, welche den Vergleichszustand herbeiführt.

Abhängig von der Zuordnung der Situationen ist für den Vergleichszustand sowohl eine Verbesserung als auch eine Verschlechterung seiner Neupunktstochastik bezüglich des Referenzzustandes möglich.

3.3 Relative Quantifizierung der Effektbelastung

3.3.1 Ziel der Quantifizierung

Betrachtungsgegenständlich sei hier eine Quantifizierung der stochastischen Effektbelastung relativ zur konventionellen Neupunktstochastik. Formale Voraussetzung dafür ist die Wahl des sich aus dem jeweiligen Effekt ergebenden Kovarianzmatrixzuschlages als Vergleichskovarianzmatrix.
Diese Art der Bezugnahme erlaubt einerseits den unmittelbaren Vergleich der Wirkung zufälliger mit bisher vernachlässigten Fehleranteilen und damit deren Kategorisierung und ferner einen Vergleich der Wirkungen der verschiedenen Effektbelastungen untereinander.

3.3.2 Quantifizierung über die Netzverzerrung

Die sich aus dem allgemeinen EWP gemäß Kapitel 2.2 ergebende stochastische quadratische Netzverzerrung $\bar{\delta}^2$ bezieht sich in dieser Form auf den quantitativen Unterschied einer Vergleichs- zu einer Referenzkovarianzmatrix und hängt in ihrer absoluten Größenordnung außer vom Grad der stochastischen Effektbelastung noch von der Anzahl der Neupunkte bzw. der Parameter ab, da sie nach (2.3) als Spur des Produktes aus inverser Referenzkovarianzmatrix und Vergleichsmatrix mit dieser Größe wächst.
In jener Eigenschaft, vom Netzumfang abhängig zu sein, ist $\bar{\delta}^2$ als Testgröße einer Relation zwischen verschiedenen stochastischen Neupunktsituationen jedoch ungeeignet und daher zur Erzielung einer Invarianz gegenüber der Netzgröße in eine Quotientenbildung

mit

u = Anzahl der unbekannten Netzkoordinaten

in der auf die Netzkoordinaten beschränkten Form

$\bar{\delta}_x^2$ = stochastische quadratische Netzverzerrung mit Beschränkung auf die Netzkoordinaten

als $q_{\bar{\delta}_x^2}^2$ einzuführen:

$$q_{\bar{\delta}_x^2}^2 = \frac{\bar{\delta}_x^2}{u} \tag{3.1a}$$

Somit gibt die neue Testgröße die durchschnittliche Belastung der konventionellen Stochastik einer Neupunktkoordinate aufgrund des betrachteten stochastischen Effekts an. Diese Belastung gilt relativ zur auf die Einzelkoordinate bezogenen konventionellen Stochastik, welche aufgrund der Einführung des auf dem jeweiligen stochastischen Effekt beruhenden Kovarianzmatrixzuschlags als Vergleichskovarianzmatrix und der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianz-

matrix in das allgemeine EWP sowie aufgrund der Division der Netzverzerrung durch die Anzahl der Netzkoordinaten für den Zusammenhang der vorgenannten Beziehung auf 1 normiert ist.

Anschaulicher ist jedoch die auf die eindimensionalen Genauigkeitsmaße – wie insbesondere die Standardabweichungen – bezogene Form $q_{\bar{\delta}_x^2}$:

$$q_{\bar{\delta}_x^2} = \sqrt{\frac{\bar{\delta}_x^2}{u}} \tag{3.1b}$$

Die Multiplikation mit 100 liefert jeweils die aussagekräftigere prozentuale durchschnittliche Effektbelastung einer Neupunktkoordinate relativ zu ihrer konventionellen Stochastik.

3.3.3 Quantifizierung über Matrizenvolumina

Aufgrund der Bemessung des Volumens einer Matrix anhand ihrer Determinante erschließt sich über diese Größe grundsätzlich eine geeignete Möglichkeit zur ganzheitlichen Quantifizierung der beteiligten Neupunktstochastiken, da jene in der üblichen geodätischen Praxis anhand von Kovarianzmatrizen dargestellt werden. Für diese Überlegung sind daher vollständige originale Kovarianzmatrizen – und nicht wie im Zuge der D-Optimalität deren Spektralmatrizen – über ihre Determinante bemessungsgegenständlich; im weiteren Gegensatz zur D-Optimalität bleibt hier das über eine Determinante anzugebende Matrixvolumen auf die Eigenschaft einer Testgröße beschränkt und findet nicht zusätzlich als Optimierungskriterium Anwendung.

Die Zielgröße zur Quantifizierung der stochastischen Effektbelastung ergibt sich in Anlehnung an die netzverzerrungsgestützte Quantifizierung und die zur Ermittlung der Netzverzerrung in das allgemeine EWP eingeführten Kovarianzmatrizen prinzipiell durch Bezugnahme auf das konventionelle Fehlerbudget in Form der zugehörigen herkömmlichen Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}} = \boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}$ als Referenz; im Sinne einer numerisch stabileren Lösung sei jedoch nicht das Fehlerbudget der Effektbelastung $\boldsymbol{C_{xx,\delta\nabla}}$ selber sondern das wahre Fehlerbudget $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon\delta\nabla}}$ – als Summe aus konventioneller Stochastik und ihrer Belastung $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}} + \boldsymbol{C_{xx,\delta\nabla}}$ – mit $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}$ verglichen. Die Kohärenz jener Zielgröße mit der netzverzerrungsgestützten Testgröße des vorigen Abschnitts wird durch Subtraktion von 1 erreicht, da die Effektbelastung in dieser Form der Bezugnahme auf das Schrittmaß des konventionellen Fehlerbudgets skaliert wird und jenes wegen Einführung des Vergleichsbudgets als $\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}} + \boldsymbol{C_{xx,\delta\nabla}}$ darin selber genau einmal enthalten ist, so dass sich die endgültige determinantengestützte Zielgröße als nunmehr ausschließlich auf die stochastische Effektbelastung bezogene Testgröße q_{det}^2 ergibt zu

$$q_{det}^2 = \frac{det\left(\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}} + \boldsymbol{C_{xx,\delta\nabla}}\right)}{det\left(\boldsymbol{C_{xx,\varepsilon}}\right)} - 1 \tag{3.2a}$$

Die Normierung dieser Testgröße auf eine einzelne Neupunktkoordinate als Durchschnittswert – wie im Zuge der netzverzerrungsgestützten Testgröße – ist hier nicht erforderlich, weil die verglichenen

Fehlerbudgets über die Volumina ihrer Kovarianzmatrizen ganzheitlich berücksichtigt wurden und so die Quotientenbildung bereits den aus allen Neupunktkoordinaten ermittelten und für diese geltenden Durchschnittswert liefert.

Anschaulicher ist jedoch auch für diese Testgröße die auf die eindimensionalen Genauigkeitsmaße – wie insbesondere die Standardabweichungen – bezogene Form q_{det}:

$$q_{det} = \sqrt{\frac{det\left(\boldsymbol{C}_{xx,}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{C}_{xx,}\boldsymbol{\delta\nabla}\right)}{det\left(\boldsymbol{C}_{xx,}\boldsymbol{\varepsilon}\right)} - 1} \tag{3.2b}$$

Die Multiplikation mit 100 liefert jeweils die aussagekräftigere prozentuale durchschnittliche Effektbelastung einer Neupunktkoordinate relativ zu ihrer konventionellen Stochastik.

Die Schätzung der stochastischen Effektbelastung auf diese Weise zwingt jedoch zur Beachtung einer numerisch induzierten Randbedingung, welche empirisch anhand der Berechnung von ein- und zweidimensionalen Beispielnetzen unterschiedlichen Umfangs gefunden werden kann:
So steigt mit der Anzahl von Neupunktkoordinaten die Wahrscheinlichkeit auf lineare Abhängigkeiten der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der konventionellen parameterbezogenen Kovarianzmatrix, deren als Divisor innerhalb der neu gefundenen Testgröße auftretende Determinante mit zunehmender Annäherung an jene algebraische Situation gegen Null strebt. Die gefundene Testgröße wird somit für größere Höhen- oder Lagenetze numerisch instabil und nicht mehr aussagesicher.

3.3.4 Quantifizierung der ausschließlich varianzenbezogenen Effektbelastung

In der Geodäsie sind häufig die Varianzen bzw. Standardabweichungen der Neupunkte und weniger deren Kovarianzen von Interesse. Im Gegensatz zu den beiden zuvor betrachteten Testgrößen soll daher nun die Quantifizierung der Effektbelastung nicht auf der Grundlage der vollständigen – also Varianzen und Kovarianzen umfassenden – Fehlerbudgets sondern beschränkt auf die genauigkeitsanzeigenden Größen (Varianzen $c_{xx}(i)$) der Einzelkoordinate i – aber in Kohärenz zu den beiden bisherigen Testgrößen ebenfalls relativ zum konventionellen Fehlerbudget – erfolgen.

Diese Überlegung setzt sich zur dritten Testgröße durch eine einfache Verhältnisbildung um, welche in ihrer quadratischen Form für den *i*-ten Parameter lautet:

$$\frac{c_{xx}, \delta\nabla(i)}{c_{xx}, \varepsilon(i)} \tag{3.3}$$

Daraus ergibt sich der für das betrachtete Netz und u Parameter gültige Durchschnittswert q_{var}^2 zu

$$q_{var}^2 = \frac{\sum_1^u \frac{c_{xx}, \delta\nabla(i)}{c_{xx}, \varepsilon(i)}}{u} \tag{3.4a}$$

Die für die Standardabweichung einer Neupunktkoordinate gültige Testgröße ergibt sich jeweils als quadratische Wurzel aus den beiden vorgenannten Formen. Speziell erhält man q_{var} zu

$$q_{var} = \sqrt{\frac{\sum_1^u \frac{c_{xx,\delta\nabla(i)}}{c_{xx,\varepsilon(i)}}}{u}} \tag{3.4b}$$

Die Multiplikation mit 100 liefert jeweils die aussagekräftigere prozentuale durchschnittliche Effektbelastung einer Neupunktkoordinate relativ zu ihrer konventionellen Stochastik, in diesem Abschnitt jedoch mit Beschränkung der beteiligten Stochastiken auf die Varianzen.

3.3.5 Bewertung und Fazit zur relativen Quantifizierung der Effektbelastung

Unter Beachtung der Randbedingung zur determinantengestützten Testgröße beschränkt sich deren Eignung auf Netze geringeren Neupunktumfangs mit weniger als 100 zu schätzenden Parametern. Da Einschränkungen dieser Art für die netzverzerrungsgestützte Testgröße nicht erkennbar sind, sollte die Quantifizierung der stochastischen Effektbelastung des konventionellen Fehlerbudgets bevorzugt über dieses Kriterium vorgenommen werden.

Unabhängig der verwendeten Testgrößen besteht der folgende, durch diese Testgrößen belegbare, grundsätzliche Zusammenhang zwischen der Anzahl der Neupunktkoordinaten und der stochastischen Effektbelastung:

Korrelationen zwischen den ausgeglichenen Neupunktkoordinaten können infolge der in konventionellen Ausgleichungsansätzen üblicherweise vernachlässigten Korrelationen innerhalb des Beobachtungsmaterials nur aufgrund des Netzdesigns auftreten und sind so dort oft nur schwach ausgeprägt; die Belastung des konventionellen Fehlerbudgets durch bisher vernachlässigte Effekte tritt daher vor allem für die Kovarianzen – also alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen der Kovarianzmatrix der Parameter – auf. Mit einer wachsenden Anzahl von Matrixzeilen und -spalten vergrößert sich so innerhalb der effektbelasteten Kovarianzmatrix der Parameter der Anteil der von der Effektbelastung sehr stark betroffenen Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen an der Gesamtheit aller Kovarianzmatrixeinträge als $\frac{u^2-u}{u^2} = \frac{u-1}{u} = 1 - \frac{1}{u}$ und relativ zum Anteil der nur gering betroffenen Hauptdiagonalenelemente als $\frac{u^2-u}{u} = \frac{u-1}{1} = u - 1$ mit der Folge einer bereits aufgrund der Netzgröße tendenziell und relativ zum konventionellen Fehlerbudget wachsenden stochastischen Effektbelastung, auch für den Gesichtspunkt der auf die Einzelkoordinate bezogenen durchschnittlichen Belastung aus der netzverzerrungsgestützten Testgröße.

Dieser den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Zusammenhang ist aus der sich üblicherweise auf die Varianzen bzw. Standardabweichungen der Neupunkte beschränkenden Betrachtung ihrer nur wenig ausgeprägten Effektbelastung nicht erkennbar oder ersichtlich, weil die Kovarianzen der Neupunkte erheblich sensibler als deren Varianzen auf die hier betrachteten Effektbelastungen reagieren

und daher sowie aufgrund des dominanten Anteils der Kovarianzen an allen Elementen der Kovarianzmatrix der Parameter die vollständige Effektbelastung sogar ein Vielfaches des vollständigen konventionellen Fehlerbudgets betragen kann, obwohl dieser Effekt für die auf die Varianzen beschränkte Effektbelastung im gleichen Fall kaum ausgeprägt sein kann.

Da in der Geodäsie ferner häufig nur die genauigkeitsanzeigenden Größen der Neupunktkoordinaten selber und nicht deren Kovarianzen von Interesse sind, macht die zumindest ergänzende Betrachtung der sich auf die Auswertung der Varianzen beschränkenden Testgröße Sinn, welche gemeinsam mit der sich auf die vollständigen Fehlerbudgets beziehenden, netzverzerrungsgestützten Testgröße als Kriterienpaar einen umfassenden und aussagefähigen Informationsgehalt zur relativen Quantifizierung der stochastischen Effektbelastung liefert.

3.3.6 Anwendungsbeispiele zur Quantifizierung der Effektbelastung in zwei Höhennetzen

Betrachtungsgegenständlich seien hier die Planungssituationen der Höhennetze

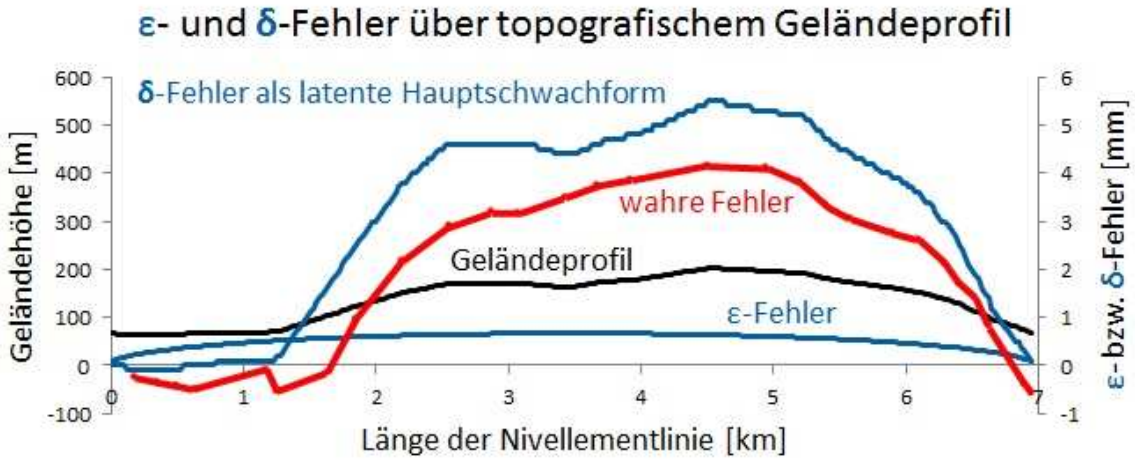
- *Testschleife Koblenz*
- *Freinetz Francop-Waltershof*

Die *Testschleife Koblenz* wurde über eine Länge von 7 km in den Jahren 1978 und 1979 insgesamt zwölfmal als Präzisions- und Schleifennivellement auf verschiedene Weisen und mit unterschiedlicher Ausrüstung ausgeführt (KUNTZ & SCHMITT 1985) und überwindet dabei einen Höhenunterschied von etwa 140 m. Der mittlere Lattenabstand betrug 25 m und damit die Anzahl der Standpunkthöhenunterschiede als Beobachtungen 280 (BRUNKHORST 2012a).
Entlang der Nivellementschleife befinden sich 28 fest vermarkte Kontrollpunkte, welche stets als Wechselpunkte mit beobachtet wurden und deren nach Verteilung des jeweiligen Schleifenschlussfehlers ausgeglichene Höhen nach der Mittelbildung aus allen zwölf Kampagnen als quasi-fehlerfreie Soll-Höhen anzusehen sind, da mögliche Fehleranteile eines einzelnen Kampagnenergebnisses im Mittelwert aller Kampagnen gefiltert sind, wie die Verteilung der Kampagnenergebnisse nach KUNTZ & SCHMITT (1985) zeigt (BRUNKHORST 2012a).

Das freie Höhennetz *Francop-Waltershof* diente der Bereitstellung und Prüfung eines gesicherten Höhenbezuges für ein dort zeitnah umgesetztes landseitiges, infrastrukturelles Großprojekt.

In diesem Zuge sollten die fast 20 Jahre alten amtlichen Höhen von acht Präzisionshöhenfestpunkten und damit jene Punkte auf mögliche Setzungen geprüft werden. Es treten insgesamt 330 Netzpunkte und 399 Beobachtungen auf, die an den Werktagen zweier aufeinanderfolgender Wochen, beginnend jeweils $9.^{\underline{00}}$ Uhr morgens, mit einem Zeitansatz von sechs Minuten pro Beobachtung erhoben wurden.

Abb. (3.1) Nivellementnetz *Testschleife Koblenz* mit topografischem Geländeprofil, wahren Fehlern, zufälligen Fehleranteilen (ε) und stochastisch-systematischen Fehleranteilen (δ) gemäß Netzplanung:



Es treten hierin infolge eines maximalen Höhenunterschiedes von lediglich 13½ Metern nur geringe Geländeneigungen und damit eine eher schwächere Wirkung systematischer Fehler auf. Im Gegensatz zur *Testschleife Koblenz* eines durch eine große Nivellementschleife geprägtem Designs weist dieses Höhennetz eine durchgehende Maschenstruktur auf und kontrastiert in jener Eigenschaft und in Bezug auf die Geländeneigung somit für den hier vorgenommenen Vergleich beabsichtigt zur *Testschleife Koblenz* (BRUNKHORST 2012a).

Die Quantifizierungsergebnisse sind angegeben in der Form

[*Testschleife Koblenz* / *Freinetz Francop-Waltershof*]

Tab. (3.2) Quantifizierungsergebnisse der effektbelastenden Induktionswirkungen zweier Nivellementnetze:

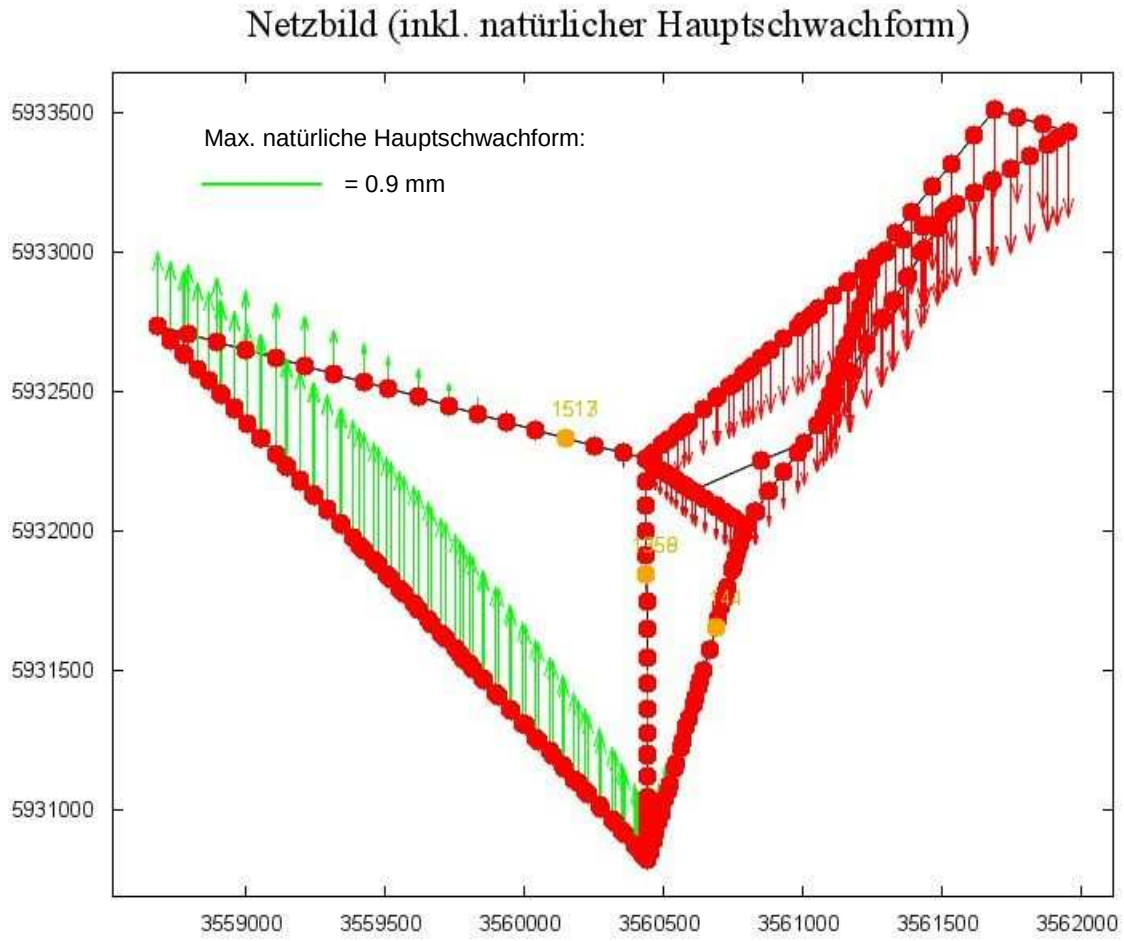
Testgröße	Anteil der Effektbelastung am konventionellen Fehlerbudget	
	Quadratische Form	Eindimensionale Form
Determinantengestützt	q^2_{det}: $\det(\boldsymbol{C}_{x,}\boldsymbol{\varepsilon}) \approx 0$	q_{det}: $\det(\boldsymbol{C}_{x,}\boldsymbol{\varepsilon}) \approx 0$
Netzverzerrungsgestützt	$q^2_{\bar{\delta}^2_x}$: 89.8 %/110.1 %	$q_{\bar{\delta}^2_x}$: 94.8 %/104.9 %
Ohne Kovarianzenanteile	q^2_{var}: 5307.2 %/92.5 %	q_{var}: 728.5%/96.2 %

Es zeigt sich zunächst, dass eine determinantengestützte Quantifizierung der Effektbelastung hier nicht sinnvoll ist, weil sich die Determinante der nur aus den zufälligen Fehleranteilen ε gespeisten, konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C}_{xx,}\boldsymbol{\varepsilon}$ nicht ausreichend von Null unterscheidet.

Für beide Probanden beträgt der Anteil der Kovarianzen an allen Elementen der Kovarianzmatrix der Parameter über 99.6 % und dominiert somit die Effektbelastung; dabei ergibt sich für den Prüfling

Testschleife Koblenz eine netzverzerrungsgestützte Effektbelastung in der Größenordnung des konventionellen Fehlerbudgets, welche jedoch bei Beschränkung auf die Varianzenanteile bereits in ihrer eindimensionalen Form auf mehr als das Siebenfache anwächst und damit ein deutlich abweichendes Verhalten zwischen parameterbezogenen Varianzen und Kovarianzen im Falle einer stochastischen Belastung der Beobachtungen mit systematischen Fehleranteilen erkennen lässt. Für den Freinetzprüfling führt diese Art der Effektbelastung hingegen zu einem einheitlichen Verhalten von neupunkthöhenbezogenen Varianzen und Kovarianzen mit einer Erhöhung jeweils in der Größenordnung des konventionellen Fehlerbudgets.

Abb. (3.2) Netzbild der freien Ausgleichung des Nivellementnetzes *Freinetz Francop-Waltershof* (mit natürlicher Hauptschwachform, deren Knotenpunkte sind orange dargestellt):



Als Ursache für die stark unterschiedliche Reaktion der inneren Struktur der Neupunktstochastiken beider Prüflinge auf die stochastische Effektbelastung kommen aufgrund des Bildungsgesetzes der Kovarianzmatrix der Parameter sowohl das klassische – sich zwischen beiden Prüflingen bereits anhand der mittleren Teilredundanz von 0.004 bzw. 0.175 unterscheidende – Netzdesign wie auch die – sich zwischen beiden Prüflingen anhand der mittleren Geländeneigung von 2.69 gon bzw. 0.70 gon und des mittleren Lattenabstandes von 25.0 m bzw. 87.9 m unterscheidende – konkrete Ausprägung der Effektbelastung in Frage.

4 Analyse zufälliger und systematischer Fehleranteile im Nivellement

In BRUNKHORST (2012a) werden die geometrischen und stochastischen Wirkungen zufälliger sowie systematischer Fehleranteile im geometrischen Nivellement konzeptionell analysiert und dargestellt. Die daraus erzielten und im Kontext mit der Analyse der Verzerrung geodätischer Netze wichtigen Erkenntnisse seien nachfolgend in Form der Zusammenfassung aus BRUNKHORST (2012a) aufgeführt.

Bisher spielten in der geodätischen Auswertepraxis die über die rein zufälligen Varianzanteile hinaus gehenden aber physikalisch tatsächlich vorhandenen Fehleranteile für das stochastische Modell der Beobachtungen kaum eine Rolle. Folglich wurden die Genauigkeiten der Parameter – insbesondere der Netzkoordinaten – stets zu günstig geschätzt. In Nivellementnetzen handelt es sich hierbei sowohl um deterministisch- als auch um stochastisch-systematische Fehleranteile, welche durch die zeitliche Veränderlichkeit des vertikalen Temperaturgradienten und dessen Stochastik induziert werden. Hieraus resultieren ebenso Korrelationen zwischen den als Netzbeobachtungen eingeführten geometrischen Standpunkthöhenunterschieden, die bisher ebenfalls vernachlässigt wurden.

Einflüsse auf nivellitische Beobachtungen, welche anhand von Kalibrierungen des Nivelliergerätes oder der verwendeten Latten gemindert oder eliminiert werden können (PELZER 1984), sind hier nicht betrachtungsgegenständlich, da es sich dabei nicht um Modellfehler handelt. Betrachtet werden hier somit ausschließlich Modellfehler infolge von Vernachlässigungen in der Beobachtungsstochastik und nicht gerätebedingte systematische Fehlereinflüsse.

Die Modellierung der auf systematische Fehleranteile bezogenen Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen nach FAWAZ (1981) und JÄGER (1990) erlaubt die Schätzung der wahren Kovarianzmatrix der Parameter und damit auch des auf die systematischen Anteile zurückgehenden Kovarianzmatrixzuschlags, der anhand des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) als Vergleichskovarianzmatrix mit der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianzmatrix spektral zerlegt und somit analysiert werden kann. Die daraus resultierende latente Hauptschwachform stellt eine Testgröße zur qualitativen Bewertung der systematischen Fehleranteile relativ zu den zufälligen Anteilen mit dem Geländeprofil als Verzerrungsträger und die resultierende Netzverzerrung eine quantitative Testgröße dafür dar. Ergänzend dazu wurde erstmalig der mittlere Kilometerfehler σ_{1km} als globale quantitative Testgröße für die Wirkung der systematischen Anteile und als bisher nur für zufällige Fehleranteile gebräuchliche genauigkeitsanzeigende Größe sowie der daraus abgeleitete mittlere Kilometerfehler pro 1 Gon Geländeneigung ($\sigma_{1km/gon}$) als Testgröße der neigungsbezogenen Sensibilisierung eines Netzes auf systematische Fehleranteile entwickelt. Die mit dem mittleren Lattenabstand positiv korrelierte Testgröße $\sigma_{1km/gon}$ gibt somit die Anfälligkeit einer Netzstochastik für systematische Fehleranteile anhand einer Größe aus dem Beobachtungsraum und parametrisiert für die Geländeneigung an und ist vom Design des Netzes abhängig, aber nicht mit dem Grad der Redundanz des Netzes korreliert.

Das zugehörige Konzept analysiert die Wirkung der systematischen Fehleranteile also quantitativ und qualitativ. Da die Wirkung systematischer Fehleranteile in freien Netzen grundsätzlich maximal ist, sollten im Interesse einer Maximalschätzung dieser Anteile die konzeptionell analysierten Prüflinge als freie Ausgleichung konzipiert werden. Dabei sollte der Netzplanungsmodus gewählt und von der Verarbeitung realer Netzdaten abgesehen werden, um die Ergebnisse nicht durch den Stichprobencharakter eines Realnetzes zu belasten.

Die sich aus den systematischen Fehleranteilen ergebenden latenten Schwachformen wirken auf die Geometrie und die Stochastik des Netzes in gleicher Weise verzerrend; so sind Neupunkte maximal ungünstiger Stochastik auch potenziell mit maximalen geometrischen Verzerrungseffekten belastet.

Insbesondere bei Liniennivellements bzw. Nivellementschleifen ist die Mächtigkeit der latenten Hauptschwachform mit über 50 % der Netzverzerrung dominant und repräsentiert so die gesamte, mit dem Effekt der systematischen Fehleranteile belastete Stochastik der Neupunkte ausreichend nach Betrag und Richtung. In solchen Fällen, die darüber hinaus an einem steilen Verlauf des Spektrums der Eigenwerte des AEWP erkennbar sind, unterscheiden sich die durch zufällige und systematische Anteile induzierten Neupunktstochastiken in ihrer inneren Struktur klar, so dass sich die zugehörigen Kovarianzmatrizen der Parameter nicht maßstäblich aufeinander abbilden lassen. Als Ursache dafür kommt neben langwellig wirkenden, netzbeherrschenden Fehlereinflüssen und Korrelationen im Beobachtungsmaterial noch das Netzdesign in Betracht. Es treten dabei oft Korrelationen zwischen den Netzpunkten auf, die darüber hinaus dann eine deutlich unterschiedliche stochastische Belastung aufweisen.

Diese für Nivellementschleifen typischen stochastischen Merkmale werden anhand des Beispiels der sog. *Testschleife Koblenz* (KUNTZ & SCHMITT 1985) aufgezeigt, welches aufgrund der auftretenden Geländeneigungen, des zeitlichen Verhaltens der Beobachtungen und des Netzdesigns zur Induktion nicht-zufälliger Fehleranteile im Nivellement sehr gut geeignet ist.

So sind hier ausgehend von einem mittlere Kilometerfehler von $\sigma_{1km} = \pm 0.5$ mm und einer Länge der Nivellementschleife von 7 km Abschlußfehler von $\pm$ 1.3 mm zu erwarten und in dieser Größenordnung auch erzielt worden; die im Bereich der Schleifenmitte zu erwartenden Genauigkeiten von maximal $\sigma_H = \pm 0.7$ mm unterschreiten jedoch die dort anhand fester Kontrollpunkte nachweisbaren Höhenfehler von bis zu 4 mm deutlich. Im Netzplanungsmodus lassen sich dafür auf physikalisch induzierte stochastisch- und deterministisch-systematische Fehleranteile basierende latente Schwachformen in der Größenordnung von rund 6 mm schätzen, welche somit netzbeherrschend sind, von der zugehörigen Hauptschwachform mit einer Mächtigkeit von rund 73 % dominiert werden und in ihrer Größenentwicklung erkennbar dem topografischen Geländeprofil folgen, wie in Abb. (3.1) gezeigt. Der Abschlussfehler ist daher zur Erklärung der entlang der Nivellementlinie wirkenden physikalisch induzierten und somit nicht-zufälligen Fehleranteile ungeeignet.

Infolge theoretischer Überlegungen und nach den Ergebnissen strukturierter Testauswertungen an Fallbeispielen ausgesuchter Konfigurationen lässt sich die Wirkung systematischer Fehleranteile im geometrischen Nivellement durch Beobachtung von Geländeabschnitten geringerer Neigung und in noch stärkerem Maße durch Verkürzung des Lattenabstandes herabsetzen. In geringerem Maße dient hierzu für Nivellementnetze ohne häufige Wechsel zwischen positiven und negativen Geländeneigungen in Beobachtungsrichtung theoretisch auch die Einhaltung eines Zeitverhaltens der Beobachtungen mit möglichst nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden und sich tageszyklisch nicht wiederholenden Messepochen.

Die drei Größen, über welche sich die Wirkung systematischer Fehleranteile parametrisieren lässt (Geländeneigung, Lattenabstand, Zeitverhalten der Beobachtungen), treten nur in vernachlässigbare Wechselwirkungen zueinander ein, so dass deren Einflüsse auf die Stochastik der Neupunkte separat betrachtet und gewertet werden können.
Unter Beachtung des Netzdesigns 0. Ordnung lässt sich die Wirkung systematischer Anteile mit einer Erhöhung der Gesamtredundanz des Höhennetzes durch Einführung zusätzlicher Stützpunkte als Anschlusspunkte reduzieren; diese Reduktion verstärkt sich, falls die Anschlusspunkte als Knotenpunkte der natürlichen Hauptschwachform des frei ausgeglichenen Höhennetzes gewählt werden. Dabei steigt Belastbarkeit und stochastische Sicherheit der Knotenpunkteigenschaft mit der Mächtigkeit der natürlichen Hauptschwachform, welche sich umgekehrt proportional zum mittleren Redundanzanteil des Netzes verhält.
Mögliche Netzspannungen zwischen den Beobachtungen und den Anschlusspunkthöhen begünstigen die Wirkung systematischer Fehler nur bei fehlenden Knotenpunkteigenschaften der Anschlusspunkte.

In den betrachteten Fallbeispielen unterschiedlicher Konfiguration sind die stochastisch-systematischen Fehleranteile mit einem Anteil von stets mindestens 80 % an der Gesamtheit der physikalisch induzierten systematischen Fehleranteile dominant; die Wirkung der deterministisch-systematischen Anteile ist daher in den meisten Fällen vernachlässigbar gering.

5 Fehlertheorie 2. Ordnung

Vorbemerkungen:

Zur Darstellung von Skalaren, Vektoren und Matrizen in diesem Kapitel siehe Vorbemerkung zu Kapitel 2.

Eine deterministisch-systematisch auf die Beobachtungen bzw. die Parameter wirkende Verzerrung wird als Beobachtungsbias b_l bzw. Parameterbias b_x bezeichnet.

Im Zusammenhang mit der Fehlertheorie werden diese Bias üblicherweise der 1. $\left(b_l(1), b_x(1)\right)$ oder 2. $\left(b_l(2), b_x(2)\right)$ Ordnung zugewiesen oder beziehen sich auf die gemeinschaftliche Wirkung aus der 1. und 2. Ordnung $\left(b_l(1+2), b_x(1+2)\right)$.

5.1 Bedeutung der Fehlertheorie 2. Ordnung als geodätisches Forschungsgebiet

Die Geodäsie bestimmt über die Parameter der Koordinaten $\boldsymbol{x}$ vorrangig die geometrische Form von Objekten beliebiger Größe anhand ein-, zwei- oder dreidimensionaler Messanordnungen und Sensorbeobachtungen $l(\boldsymbol{x})$ auf und zwischen diskreten Einzelpunkten, welche das Objekt auf diese Weise vernetzen (TORGE 1975).

Auf der Grundlage der Dichteverteilungsannahme der wahren Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}$ der Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ lassen sich nach dem Konzept der Maximum-Likelihoodschätzung (M-Schätzung), die im Fall normalverteilter wahrer Fehler $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf die klassische Methode-der-Kleinsten-Quadrate führt, die wahrscheinlichsten Parameter $\boldsymbol{x}$ und deren Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ ermitteln. Die M-Schätzung gilt dabei sowohl für den überbestimmten als auch den nicht-redundanten Fall.

Die strenge numerische Lösung der M-Schätzung der Parameter $\boldsymbol{x}$ – in der Regel als Methode-der-Kleinsten-Quadrate (L2-Norm) praktiziert – erfolgt aus geodätischen Netzmessungen $\boldsymbol{l} = l(\boldsymbol{x})$ auf der Grundlage einer Linearisierung der Beobachtungsgleichungen, also einer Taylorreihenentwicklung in 1. Ordnung. Im Gegensatz impliziert bereits für die Varianzenfortpflanzung, wie auch für die M-Schätzung im redundanten Fall, der Abbruch der Taylorentwicklung nach dem Glied 1. Ordnung in Bezug auf die Ermittlung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ eine Vernachlässigung, welche jene Matrix stets zu optimistisch erscheinen lässt. Die Behebung jenes Mangels in Form der Modellierung von Gliedern höherer Ordnung betrifft sowohl die klassische Varianzenfortpflanzung als auch allgemeine redundante M-Schätzungen wie die klassische Netzausgleichung nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate.

Es ergibt sich so die fachlich motivierte Notwendigkeit zur Herleitung einer allgemeinen Darstellung für die bisher vernachlässigten Fehlerbudgets der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ der Varianzenfortpflanzung sowie der Ausgleichung (M-Schätzung), um auf diesen Grundlagen eine Analyse des latenten Fehlerbudgets geodätischer Netze und Messprozesse durchführen zu können.

Ferner ergibt sich aus dem Abbruch der Taylorentwicklung nach dem Glied 1. Ordnung neben jenem stochastischen auch ein geometrischer Verzerrungseffekt, welcher als Parameterbias 2. Ordnung und Nichtlinearitätsverzerrung auf die Netzgeometrie wirkt und quantitativ und qualitativ zu schätzen ist.

Das Thema hat im Zusammenhang mit der derzeit weltweit stattfindenden Überführung klassischer Landesnetze in den ITRF-Bezug, wo sich das betreffende geometrische Fehlerbudget als langwellige Schwachformen einer Größenordnung von bis zu 0.3 m (JÄGER 1988), 1.0 m (Abb. (A.6.1.1) aus Anhang 6.1), 2.5 m (JÄGER 2010) bzw. 4.5 m (JÄGER et al., 2012) zeigt und entsprechend modellierbar ist, hohe Aktualität, weil ein vollständiger mathematischer Nachweis zur Erklärung dieser Schwachformen bisher nicht erbracht werden konnte und insbesondere der mögliche Anteil des Parameterbias 2. Ordnung daran nicht geklärt ist.
Im Falle des DHDN als den auf das Gebiet der alten Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland entfallenden Teil des Reichsdreiecksnetzes finden jene Schwachformen einer Größenordnung von bis 2.5 m ihre Ursache auch in der Entstehungsgeschichte des Reichsdreiecksnetzes, das als Anfelderung der nicht-preußischen Dreiecksnetze an den so genannten Schreiber'schen Block keine einheitliche Netzlösung darstellt (DERENBACH et al. 2006) und somit dessen Ähnlichkeitstransformation auf ein bundesweites, GNSS-gestütztes und homogenes Passpunktfeld entsprechende Restklaffungen gemäß Abb. (A.6.1.2) zeigt (HECK 1991, JÄGER 2003). GNSS-gestützte Positionierungsverfahren nutzen für den Übergang vom ETRS89-Bezug in das Datum des DHDN geeignete Restklaffeninterpretationen als Bestandteil der jeweiligen RTCM-Message.

Die im Zuge dieser Überführung aufgedeckten geometrischen Verzerrungseffekte lassen sich in ihrer Größenordnung erwartungsgemäß auch nicht ausschließlich anhand der sich auf die Fehlertheorie 1. Ordnung beschränkenden Netzstochastizität erklären, deren spezielle mechanische Analogien von JÄGER (1988) für freie und angeschlossene Lagenetze nachgewiesen wurden. Es ist daher denkbar, dass – neben den für die natürlichen Schwachformen 1. Ordnung gezeigten Analogien – ebenfalls mechanische und noch zu findende Analogien für die von der Fehlertheorie 2. Ordnung induzierte Netzstochastizität existieren, welche latente Schwachformen ausbildet und das konventionelle Fehlerbudget geodätischer Lagenetze ergänzt und zur Erklärung der aufgedeckten geometrischen Verzerrungseffekte beitragen kann.

Folgende Übersicht zeigt die Struktur der aus dem Taylorreihenabbruch nach dem Glied 1. Ordnung induzierten Wirkungen auf Geometrie und Stochastik der Parameter $\boldsymbol{x}$ für den nicht überbestimmten $(r = 0)$ und den überbestimmten $(r > 0)$ Fall einer geodätischen Ortungsaufgabe mit nichtlinearem funktionalen Modell.

Tab. (5.1) Übersicht der systematischen und stochastischen Wirkung der Nichtlinearitätsverzerrung:

Redundanz	Deterministisch-systematische Wirkung	Stochastische Wirkung
$r = 0$	(Geom.) Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$	Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$
$r > 0$	(Geom.) Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x^+}(\mathbf{2})$	Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{xx}^+}(\mathbf{2})$

Es ist zu beachten, dass sowohl das geometrische als auch das stochastische Fehlerbudget geodätischer Ortungsaufgaben neben den sich aus der Nichtlinearität des funktionalen Modells speisenden Effekten 2. Ordnung stets noch mit den sich aus Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen ergebenden Effekten belastet sind, welche ebenfalls zur Ausbildung von latenten Schwachformen führen, die ganzheitlich mit den Schwachformen 2. Ordnung beispielsweise anhand jener Überführung von Landesnetzen in den ITRF-Bezug erkennbar werden. Das Kapitel 5 soll daher der Ermittlung des geometrischen und des stochastischen Effekts 2. Ordnung dienen und deren Größenordnungen finden, um somit insbesondere deren Anteil an den langwelligen Schwachformen in zahlreichen Landesnetzen erkennen und beurteilen zu können.

5.2 Grundsätzliches zur Fortpflanzung zufälliger Varianzanteile

Zwischen den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ und den gesuchten Unbekannten bzw. Parametern $\boldsymbol{x}$ einer geodätischen Ortungsaufgabe bestehe grundsätzlich ein linearer oder nichtlinearer Zusammenhang

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = x(\tilde{\boldsymbol{l}}) = x(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{5.1}$$

welcher damit auch zwischen den – in der Regel positiv korrelierten – Fehlern $\boldsymbol{\varepsilon}$ dieser Größen des Beobachtungs- ($\boldsymbol{\varepsilon}$) und Parameterraumes ($\boldsymbol{\varepsilon_x}$) gilt und im umgekehrten Falle als funktionales Modell die unbekannten Parameter $\boldsymbol{x}$ auf die Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ abbildet.

Abb. (5.1) Beziehung zwischen Beobachtungsraum und Parameterraum:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{\nabla_l} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{C_{ll}} \end{Bmatrix} \underset{\text{funktionales Modell } \boldsymbol{A}}{\overset{\boldsymbol{x}=x(\boldsymbol{l}),\ \text{zu } \boldsymbol{A} \text{ umgekehrtes Modell}}{\rightleftarrows}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{b_x} \\ \boldsymbol{\varepsilon_x} \\ \boldsymbol{C_{xx}} \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{l}$: Geodätische Beobachtung bzw. Beobachtungsraum

$\boldsymbol{\nabla_l}$: Deterministisch-systematischer Fehleranteil von $\boldsymbol{l}$ als beobachtungsbezogener Bias

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Zufälliger Fehleranteil von $\boldsymbol{l}$

$\boldsymbol{C_{ll}}$: Stochastisches Modell der Beobachtungen als Kovarianzmatrix

$\boldsymbol{x}$: Zu schätzende Unbekannte bzw. Parameterraum

$\boldsymbol{b_x}$: Deterministisch-systematischer Fehleranteil von $\boldsymbol{x}$ als parameterbezogener Bias

$\boldsymbol{\varepsilon_x}$: Zufälliger Fehleranteil von $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{C_{xx}}$: Kovarianzmatrix der Unbekannten (Parameter)

Die konkrete Beziehung $x(\tilde{\boldsymbol{l}})$ aus (5.1) stellt sowohl die Abhängigkeit der Stochastik $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ bzw. $\boldsymbol{C_{xx}}$ der Parameter $\boldsymbol{x}$ von der Stochastik $\boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. $\boldsymbol{C_{ll}}$ des Beobachtungsraumes $\boldsymbol{l}$ als auch die Abhängigkeit des Parameterbias $\boldsymbol{b_x}$ vom Beobachtungsbias $\boldsymbol{\nabla_l}$ bzw. $\mathbf{b}_{\boldsymbol{l}}$ dar.
Dieses (5.2) und das folgende (5.3) Kapitel behandeln ausschließlich die Varianzenfortpflanzung und sind daher auf die Betrachtung der stochastischen Größen $\boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. $\boldsymbol{C_{ll}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ bzw. $\boldsymbol{C_{xx}}$ beschränkt.

Die Stochastik des Beobachtungsraumes realisiert sich für die einzelnen Beobachtungen als (normalverteilte) Differenz $\boldsymbol{\varepsilon}$ zwischen dem als fehlerbehaftet anzunehmenden realen Beobachtungsmaterial $\boldsymbol{l}$ einer geodätischen Stichprobe und den wahren Beobachtungen bzw. ihren Erwartungswerten $E\{\boldsymbol{l}\}$, an deren Stelle im Redundanzfall auch die (nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate bzw. L2-Norm) ausgeglichenen Beobachtungen angenommen werden können. Diese Stochastik vervollständigt sich anhand der zwischen den einzelnen Beobachtungen bestehenden Korrelationen zum stochastischen (À-priori-) Modell der Beobachtungen als $\boldsymbol{C_{ll}}$-Kovarianzmatrix.

Ein in der grundlegenden Beziehung (5.1) möglicherweise gegebener nichtlinearer Zusammenhang zwischen den Beobachtungen $\tilde{\boldsymbol{l}}$ und den Parametern $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist aufgrund der zur Lösung einer nicht überbestimmten oder redundanten geodätischen Ortungsaufgabe in der Regel erforderlichen Matrixalgebra vorbereitend zu linearisieren. In der Geodäsie resultiert aus dem Abbruch der zugehörigen Taylorreihenentwicklung – nach dem üblicherweise ersten Glied – eine linearisierungsbedingte Näherung für die Abbildung des Beobachtungsraumes, also der Beobachtungen selber und deren Stochastik, in den Parameterraum.

Für die geometrische Lösung einer Ortungsaufgabe oder Parameterschätzung ergeben sich daraus die Folgen einer iterativen Anwendungsobligation der lösungserzeugenden Matrixalgebra zur Annäherung an die geometrische Erwartungswertsituation und eines für jene Situation bestehenden linearisierungsbedingten Parameterbias ab der zweiten Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2}+)$ als Differenz zu einer geometrischen Lösungssituation (*Schätzergebnis* $M(\boldsymbol{x})$), welche auf einer (konvergierenden) lösungserzeugenden Anwendung von Gliedern bis zur 1. Ordnung beruht.

Abb. (5.2) Linearisierungsbedingter geometrischer Verzerrungseffekt der Varianzanteile 2. Ordnung:

				Geometrische Erwartungswertsituation $E(\boldsymbol{x})\left(\approx x(\tilde{\boldsymbol{l}})\right)$
Linearisierungsbedingte geometrische Lösung (Schätzergebnis) $M(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{A})^{-1} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{l}$	+	Parameterbias höherer Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2}+)$	=	bzw.
				Wahre geometrische Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}} = x(\tilde{\boldsymbol{l}})$

Dabei realisiert sich das Problem der Linearisierung im iterativen Berechnungsverfahren zweistufig:

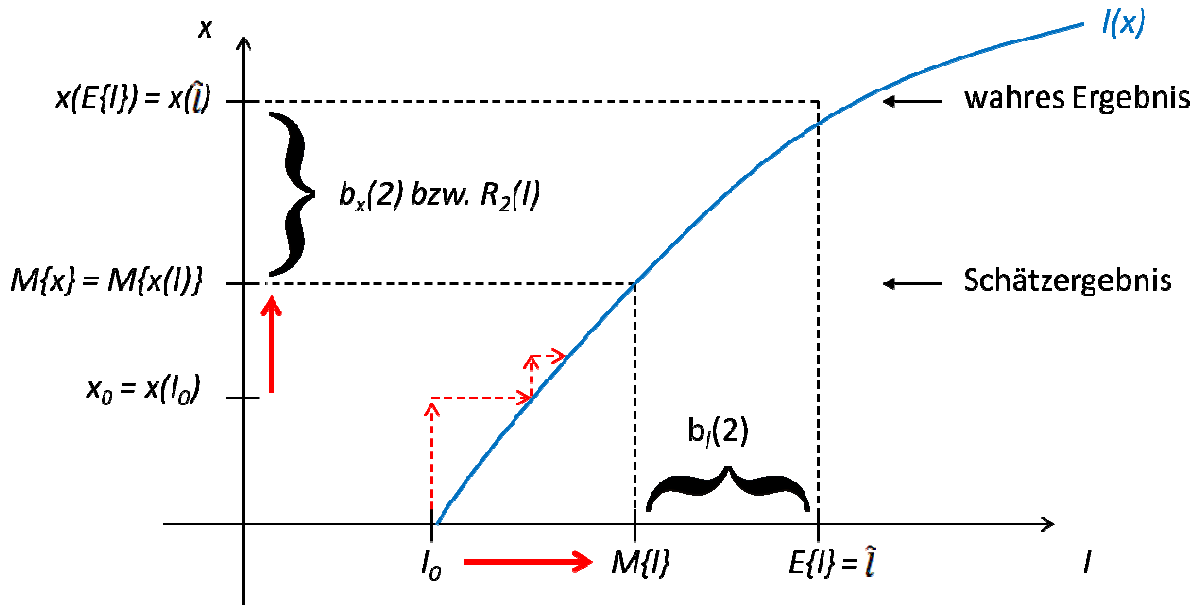
Verfahrensstart ist die Schätzung einer Zielgröße $\boldsymbol{x_0} = x(\boldsymbol{l_0})$ (hier nach der L2-Norm), die infolge des Abbruchs der linearisierenden Taylorreihe nach dem üblicherweise ersten Glied nur genähert erfolgen kann und daher im Anschluss daran zur Neuberechnung der Ausgangsgröße $\boldsymbol{l_0} = l(\boldsymbol{x_0})$ als bis hier einmal verbesserte Beobachtung führen muss; die Schätzung der Zielgröße wird für den aktualisierten Linearisierungspunkt $\boldsymbol{l_0}$ im Rahmen einer zweiten Iteration erneut durchgeführt. Mit der Anwendung weiterer Iterationen gelingt im Falle einer konvergierenden Ausgleichung eine weitere geometrische Annäherung an das Schätzergebnis $(M\{\boldsymbol{l}\}, M\{\boldsymbol{x}\})$ der betrachteten Stichprobe.

Die konventionelle Anwendung der L2-Norm-Schätzung liefert so stets den Schätzwert $M\{x(\boldsymbol{l})\}$ an der Stelle des aktuellen Linearisierungspunktes $\boldsymbol{l_0}$ als genäherte Zielgröße und es bildet sich daher das

Paar korrespondierender Einzelwerte $(\boldsymbol{l_0}, M\{x(\boldsymbol{l_0})\})$. Dabei kommen der Linearisierungspunkt und so die Beobachtung $\boldsymbol{l}$ ihrem Erwartungswert $M\{\boldsymbol{l}\}$ und der gesuchte Parameter $\boldsymbol{x}$ seinem Erwartungswert $M\{\boldsymbol{x}\}$ zwar beliebig nahe, ohne ihn jedoch jeweils zu erreichen. Das zugehörige Iterationsverfahren ist in Abbildung (5.3) mit roten Pfeildarstellungen symbolisiert.

Die zweite Stufe des Linearisierungsproblems besteht in einem Parameterbias höherer Ordnung, der in Abbildung (5.3) anhand des Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2}) = R_2(\boldsymbol{l})$ repräsentiert wird und in dieser Form von der Stochastik des Beobachtungsraumes (Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$) und der Nichtlinearität der Abbildung $x(\boldsymbol{l})$ abhängt und sich in den zugehörigen Beobachtungsbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_l}(\mathbf{2})$ überführen lässt. Die Berücksichtigung jener stochastisch induzierten und so *quasi*- und nicht deterministisch-systematischen Bias 2. Ordnung liefert das wahre Stichprobenergebnis $E\{\boldsymbol{l}\}$ / $x(E\{\boldsymbol{l}\})$.

Abb. (5.3) Beobachtungs- $(\boldsymbol{b_l}(\mathbf{2}))$ und parameterbezogene $(\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2}) = R_2(\boldsymbol{l}))$ Residuen 2. Ordnung für linearisierte Schätzer:



Die Parameterstochastik einer Ortungsaufgabe ist einhergehend mit dem Effekt einer Vernachlässigung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ belastet, welche in diesem Zuge stets zu günstig geschätzt und für den nicht überbestimmten Fall vom o.a. stochastischen Modell der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$ induziert wird.

Für dieses Modell sei die Abweichung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\} \tag{5.2}$$

zwischen der (normalverteilten) Realbeobachtung $\boldsymbol{l}$ und ihrem wahren oder Erwartungswert $E\{\boldsymbol{l}\}$ grundlegend.

5.3 Geometrische und stochastische Verzerrungseffekte 2. Ordnung der nichtlinearen Varianzenfortpflanzung

In Kapitel 5.3 werden der geometrische Verzerrungseffekt als Parameterbias 2. Ordnung für skalare und vektorwertige Funktionen sowie der zugehörige stochastische Verzerrungseffekt als Varianzanteil bzw. Kovarianzmatrixanteil der nichtlinearen Varianzenfortpflanzung zunächst für den allgemeinen Fall einer beliebigen aber symmetrischen Dichtefunktion der Beobachtungen und anschließend für die spezielle Annahme normalverteilter Elementarfehler entwickelt.

Tab. (5.2) Übersicht der Kapitel zur Entwicklung der geometrischen ($\boldsymbol{b_x}$) und stochastischen ($\boldsymbol{C}$) Verzerrungseffekte 2. Ordnung:

Dichtefunktion:		beliebig symmetrisch		normalverteilt	
Approximationsvektor $\boldsymbol{l_0}$:		$\boldsymbol{l_0} = E(\boldsymbol{l})$			
Beobachtung	Parameter	$\boldsymbol{b_x}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{b_x}$	$\boldsymbol{C}$
Skalar	Skalar	5.3.2	5.3.2	5.3.5	5.3.5
Vektor	Skalar	5.3.3	5.3.3	5.3.6	5.3.6
Vektor	Vektor	5.3.4	5.3.4	5.3.7	5.3.7

Die entsprechenden Verzerrungseffekte für den Redundanzfall sind davon zu unterscheiden und hier nicht betrachtungsgegenständlich.

5.3.1 Fortpflanzung systematischer und zufälliger Varianzanteile in nichtlinearen Funktionen

Aufgrund eines nichtlinearen Zusammenhangs f in

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{l}) = f(\tilde{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\varepsilon}) \neq f(\tilde{\boldsymbol{l}}) \tag{5.3a}$$

mit

$$E\{\boldsymbol{x}\} = E\{f(\boldsymbol{l})\} = E\{f(\tilde{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\varepsilon})\} \neq E\{f(\tilde{\boldsymbol{l}})\} \tag{5.3b}$$

zwischen den gegebenen Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ und den zu bestimmenden Parametern $\boldsymbol{x}$ ist zur Ermittlung des Fortpflanzungsverhaltens der beobachtungsbezogenen zufälligen Varianzanteile ($\boldsymbol{\varepsilon}$) in den Parameterraum ($\boldsymbol{\varepsilon_x}$) eine Linearisierung von f auch für den nicht überbestimmten Fall erforderlich. Somit sind folglich parameterbezogene zufällige Varianzanteile $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ höherer Ordnungen zu erwarten, die in der konventionellen, sich auf Glieder erster Ordnung beschränkenden Fehlertheorie unberücksichtigt bleiben. Die einfache Form der auf die 2. Ordnung bezogenen Anteile von $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ stellt unmittelbar den gesuchten geometrischen Verzerrungseffekt dar. Der zugehörige, sich aus den Anteilen 2. Ordnung

speisende stochastische Verzerrungseffekt ergibt sich in seiner quadratischen Form durch Subtraktion der quadratischen konventionellen, also auf die 1. Ordnung bezogenen Parameterstochastik von der quadratischen Form der Summe aus den Anteilen 1. und 2. Ordnung von $\boldsymbol{\varepsilon_x}$.
Eine nichtlineare Ortungsaufgabe erfüllt daher in jedem Falle die Voraussetzung, parameterbezogene Verzerrungseffekte höherer Ordnungen zu induzieren und lässt deren analytische Herleitung für den nicht überbestimmten Fall zu, da hierfür die Anwendung von Matrixalgebra entbehrlich ist.
Eine analytische Bestimmung der parameterbezogenen zufälligen Varianzanteile nach der 2. Ordnung gelingt somit anhand einer nicht überbestimmten und nichtlinearen Ortungsaufgabe.
Zur Verifizierung entsprechender Beziehungen für den Redundanzfall wäre zunächst zu zeigen, dass sich die Beziehungen des nicht überbestimmten Falls als spezielle Lösungen daraus ergeben.

5.3.2 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit skalarwertigen Beobachtungen

Die zur Betrachtung der Fortpflanzung zufälliger Varianzanteile erforderliche Linearisierung der dem Parameter x zugeordneten nichtlinearen Zielfunktion f erfolge über eine Taylorreichenentwicklung am Linearisierungspunkt l_0 und bis einschließlich zweitem Reihenglied, da hier insbesondere die Anteile 2. Ordnung untersuchungsgegenständlich und daher mit abzubilden sind, mit $dl = l - l_0$:

$$\begin{aligned} x = f(l) = f\big(l_0 + (l - l_0)\big) = f(l_0 + dl) \\ \approx f(l_0) + \frac{1}{1!} * \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl + \frac{1}{2!} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * dl^2 \end{aligned} \tag{5.4a}$$

Nach Subtraktion des Funktionswertes $f(l_0)$ am Linearisierungspunkt l_0 ergibt sich:

$$dx = x - f(l_0) = \frac{1}{1!} * \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl + \frac{1}{2!} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * dl^2 \tag{5.4b}$$

Für die Berechnung des Momentes 2. Ordnung ist die Näherung

$$f(E\{l\}) \approx E\{f(l)\} = E\{x\} \tag{5.5a}$$

zulässig, welche auf den speziellen Linearisierungspunkt $l_0 = E\{l\}$ bezogen lautet

$$f(l_0) = f(E\{l_0\}) \approx E\{f(l_0)\} = E\{x\} \tag{5.5b}$$

und eingesetzt in Beziehung (5.4b) unter der – ohne Beschränkung des allgemeinen Falles geltenden – Voraussetzung dieses Linearisierungspunktes

$$dl = l - l_0 = l - E\{l\} = l - \tilde{l} = \varepsilon$$

auf die geometrischen Verzerrungsanteile 1. und 2. Ordnung führt

$dx = x - f(l_0) = x - E\{x\} = \varepsilon_x =$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1!} * \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \varepsilon + \frac{1}{2!} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * \varepsilon^2 \tag{5.6}$$

Daraus ist der Parameterbias 2. Ordnung als geometrischer Verzerrungseffekt unmittelbar entnehmbar:

$$b_x(2) = \frac{1}{2} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * E\{\varepsilon^2\} \tag{5.7}$$

Der stochastische Verzerrungseffekt 2. Ordnung ergibt sich in seiner quadratischen Form gemäß Kapitel 5.3.1 wie folgt:

$$\sigma_x^2(2) = E\left\{\left(\frac{1}{1!} * \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \varepsilon + \frac{1}{2!} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * \varepsilon^2\right)^2 - \left(\frac{1}{1!} * \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \varepsilon\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\frac{1}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * \varepsilon^2\right)^2 + \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \varepsilon * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * \varepsilon^2\right\}$$

$$\sigma_x^2(2) = \frac{1}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0}\right)^2 * E\{\varepsilon^4\} + \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * E\{\varepsilon^3\} \tag{5.8}$$

5.3.3 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit vektorwertigen Beobachtungen

Die Linearisierung des Parameters x führt im 1. Glied auf die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}$ der geordneten partiellen ersten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ (angegeben für den allgemeinen Fall der 1. Beobachtung l_1, einer beliebigen Beobachtung l_i und der letzten Beobachtung l_n)

mit

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) = \left|\frac{\partial X}{\partial l_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial X}{\partial l_i} \quad \cdots \quad \frac{\partial X}{\partial l_n}\right|_{[1,n]}$$

und im 2. Glied auf die Hesse-Matrix $\left.\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})\right|_{l_0}$ der geordneten partiellen zweiten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ (in allen Kombinationen für die beiden jeweils an einer partiellen zweiten Ableitung beteiligten Differentiale)

mit

$$\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial {l_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial l_i \delta l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial l_n \delta l_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 X}{\partial l_1 \delta l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial {l_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial l_n \delta l_i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 X}{\partial l_1 \delta l_n} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial l_i \delta l_n} & \cdots & \frac{\partial^2 X}{\partial {l_n}^2} \end{vmatrix}_{[n,n]} \tag{5.9a}$$

Nach HAFTMANN (2009) ergibt sich:

$x = f(\boldsymbol{l}) = f\big(\boldsymbol{l_0} + (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0})\big)$

$$x \approx f(\boldsymbol{l_0}) + \frac{1}{1!} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0}) + \frac{1}{2!} * (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0})^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0}) \tag{5.4c}$$

Mit $\boldsymbol{l_0}$ sei analog zu Kapitel 5.3.2 ein Näherungswert als Linearisierungspunkt für die vektorwertige Variable $\boldsymbol{l}$ eingeführt.

Ohne Beschränkung des allgemeinen Falles sei zum gewählten Linearisierungs- bzw. Entwicklungspunkt $\boldsymbol{l_0}$ die Annahme $\boldsymbol{l_0} = E\{\boldsymbol{l}\}$ getroffen, so dass sich die Entwicklung von x auch schreiben lässt

$$x \approx f(E\{\boldsymbol{l}\}) + \frac{1}{1!} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\}) + \frac{1}{2!} * (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\}) \tag{5.4d}$$

Mit der für die Berechnung des Momentes 2. Ordnung zulässigen und ebenfalls für die vektorwertige Variable $\boldsymbol{l}$ gültigen Näherung (5.5a) $f(E\{\boldsymbol{l}\}) \approx E\{f(\boldsymbol{l})\} = E\{x\}$ und Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}$ gemäß Beziehung (5.2) gilt für die Entwicklung von Beziehung (5.4d) weiter

$$x \approx E\{x\} + \frac{1}{1!} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2!} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.4e}$$

Man erhält daraus durch Subtraktion des Erwartungswertes $E\{x\}$ des Parameters x die stochastische Größe $\boldsymbol{\varepsilon}$ in den Parameterraum transformiert zu

$$\varepsilon_x = x - E\{x\} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.4f}$$

Daraus ist der Parameterbias 2. Ordnung als geometrischer Verzerrungseffekt unmittelbar entnehmbar:

$$b_x(2)_{[1,1]} = \frac{1}{2} * E\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^T{}_{[1,n]} * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})_{[\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}]}\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}_{[\boldsymbol{n},1]}\right\} \tag{5.10}$$

Das stochastische Gesamtbudget ergibt sich in seiner quadratischen Form mit ε_x nach (5.4f) gemäß dem Ansatz

$\sigma_x^2 = E\{\varepsilon_x * {\varepsilon_x}^T\}$

$$= E\left\{\left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}\right) * \left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}\right)^T\right\}$$

$$= E\left\{\left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}\right) * \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T * \boldsymbol{\varepsilon}\right)\right\}$$

$$= E\{\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T * \boldsymbol{\varepsilon} +$$

$$\frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T * \boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Der stochastische Verzerrungseffekt 2. Ordnung $\sigma_x^2(2)$ folgt daraus in seiner quadratischen Form per Subtraktion des auf die 1. Ordnung beschränkten Terms $\sigma_x^2(1) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T$:

$$\sigma_x^2(2) =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T +\right.$$

$$\left.\frac{1}{4} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T * \boldsymbol{\varepsilon}\right\}$$

$$= E\left\{\left(\frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T\right)^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T +\right.$$

$$\left.\frac{1}{4} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon} * \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}\right)^T\right\}$$

Mit der Identität (5.12) gilt weiter

$$\sigma_x^2(2) = E\left\{\left(\frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T\right)^T +\right.$$

$$\left.\frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})\right)^T\right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(2) = {} & \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0} * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T + \\ & \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})|_{l_0}{}^T + \\ & \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^T\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.3.4 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für vektorwertige Funktionen

Die Verwendung der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2 f(l)}$ in ihrer quadratischen Form (5.9a) ist erforderlich für alle symmetrischen Produktbildungen mit Beteiligung der Hesse-Matrix als einmalig auftretender mittlerer Multiplikator; bezüglich der Verwendung von Formeln in datenverarbeitenden Systemen sei jedoch diese Matrix i.d.R. als zum Zeilenvektor vektorisierte Form von (5.9a) gemäß folgender Beziehung (5.9b) mit der Bezeichnung $\boldsymbol{D_V^2}$ verwendet.

Die (Hesse-) Matrix lautet für den allgemeinen Fall der einzelnen Beobachtung l_i mit $i = 1 \cdots n$:

$$\boldsymbol{D_V^2 f(l)} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 x}{\partial {l_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \partial l_n} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial {l_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_n} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial l_u \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial l_u \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 x}{\partial {l_n}^2} \end{matrix} \right|_{[1,n^2]} \tag{5.9b}$$

Mit Beteiligung der Hesse-Matrix in ihrer quadratischen Form gemäß (5.9a) (linke Gleichungsseite) und ihrer vektorisierten Form gemäß (5.9b) (rechte Gleichungsseite) gilt unter Verwendung des wie folgt definierten Kronecker-Produkts

$$\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} * \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon} * \varepsilon_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon} * \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 * \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_1 * \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_1 * \varepsilon_n \\ \vdots \\ \varepsilon_i * \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i * \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_i * \varepsilon_n \\ \vdots \\ \varepsilon_n * \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n * \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n * \varepsilon_n \end{pmatrix}_{[n^2,1]}$$

die Identität

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T{}_{[1,n]} * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)}_{[n,n]}\Big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}_{[n,1]}$$

$$= \left(\varepsilon_1 * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_1}^2} + \varepsilon_i * \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \delta l_i} + \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \delta l_n} \quad \varepsilon_1 * \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_1} + \varepsilon_i * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_i}^2} + \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \delta l_n} \right.$$

$$\varepsilon_1 * \frac{\partial^2 x}{\partial l_n \partial l_1} + \varepsilon_i * \frac{\partial^2 x}{\partial l_n \partial l_i} + \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_n}^2}\Bigg) * \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1^2 * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_1}^2} + \varepsilon_1 * \varepsilon_i * \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \delta l_i} + \varepsilon_1 * \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_1 \partial l_n}$$

$$+\varepsilon_1 * \varepsilon_i * \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_1} + \varepsilon_i^2 * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_i}^2} + \varepsilon_i * \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_n} + \varepsilon_1 * \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_n \partial l_1} + \varepsilon_i * \varepsilon_n * \frac{\partial^2 x}{\partial l_n \partial l_i} + \varepsilon_n^2 * \frac{\partial^2 x}{\partial {l_n}^2}$$

$$= \boldsymbol{D_V^2 f(l)}_{[1,n^2]}\Big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})_{[n^2,1]}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T{}_{[1,n]} * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)}_{[n,n]}\Big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}_{[n,1]} = \boldsymbol{D_V^2 f(l)}_{[1,n^2]}\Big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})_{[n^2,1]} \tag{5.12}$$

und mit $\boldsymbol{D_V^2 f(l)}$ gemäß (5.9b) somit für Beziehung (5.4f) unter Verwendung des Kronecker-Produkts $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\,[1,1]} &= x_{[1,1]} - E\{x\}_{[1,1]} \\ &= \boldsymbol{D f(l)}_{[1,n]}\Big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}_{[n,1]} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}_{[1,n^2]}\Big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})_{[n^2,1]} \end{aligned} \tag{5.4g}$$

In der Form (5.4g) ist unter Verwendung der Jacobi-Matrix $\boldsymbol{D f(l)}$ und der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_V^2 f(l)}$ das Parameterresiduum x vektorfähig, indem sich diese beiden Matrizen durch Hinzufügen jeweils einer weiteren Zeile für die entsprechenden Ableitungen eines weiteren Parameters nach unten verlängern:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon_x}_{[u,1]} &= \boldsymbol{x}_{[u,1]} - E\{\boldsymbol{x}\}_{[u,1]} \\ &= \boldsymbol{D f(l)}_{[u,n]}\Big|_{l_0} * \boldsymbol{\varepsilon}_{[n,1]} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}_{[u,n^2]}\Big|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})_{[n^2,1]} \end{aligned} \tag{5.4h}$$

Die beteiligte Hesse-Matrix hat hierin die nachstehende allgemeine Form.

Die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen $\boldsymbol{D^2 f(l)}$ lautet (angegeben für den allgemeinen Fall der 1. Beobachtung l_1, einer beliebigen Beobachtung l_i und der letzten Beobachtung l_n sowie für die 1. Funktion X_1, einer beliebigen Funktion X_i und der letzten Funktion X_u):

$$D_V^2 f(\boldsymbol{l}) =$$

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial {l_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_1 \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_1 \partial l_n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 X_i}{\partial {l_1}^2} & \cdots & \frac{\delta^2 X_i}{\partial l_1 \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_i}{\partial l_1 \partial l_n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 X_u}{\partial {l_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_1 \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_1 \partial l_n} & \cdots \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_i \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial {l_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_i \partial l_n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 X_i}{\partial l_i \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_i}{\partial {l_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X_i}{\partial l_i \partial l_n} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_i \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial {l_i}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_i \partial l_n} & \cdots \end{matrix} \tag{5.9c}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_u \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial l_u \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_1}{\partial {l_n}^2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 X_i}{\partial l_u \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_i}{\partial l_u \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_i}{\partial {l_n}^2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_u \partial l_1} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial l_u \partial l_i} & \cdots & \frac{\partial^2 X_u}{\partial {l_n}^2} \end{matrix}\right|_{[u,n^2]}$$

Der Parameterbias 2. Ordnung ist Beziehung (5.4g) mit der Hesse-Matrix gemäß (5.9c) entnehmbar

$$\boldsymbol{b_x}(\boldsymbol{2})_{[u,1]} = \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})_{[u,n^2]}\Big|_{l_0} * E\{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}\}_{[n^2,1]} \tag{5.13}$$

Für die Stochastik des Parametervektors $\boldsymbol{x}$ gilt nun der Ansatz

$$\boldsymbol{C_{xx}} = E\{(\boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{x}\}) * (\boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{x}\})^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon_x} * \boldsymbol{\varepsilon_x}^T\}$$

Das stochastische Gesamtbudget ergibt sich in seiner quadratischen Form mit $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ nach (5.4g) gemäß dem Ansatz

$$\boldsymbol{C_{xx}} = E\{(\boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{x}\}) * (\boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{x}\})^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon_x} * \boldsymbol{\varepsilon_x}^T\}$$

$$= E\left\{\left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})\right) * \left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})\right)^T\right\}$$

$$= E\left\{\left(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})\right) * \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T\right)\right\}$$

$$= E\left\{\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} * \frac{1}{2} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \frac{1}{2} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T\right\}$$

$$\boldsymbol{C}_{xx} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T +$$

$$\frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T \tag{5.14}$$

Sei also $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{l})$ eine vektorfähige Funktion zwischen einem (quasi-normalverteilten) Zufallsvektor $\boldsymbol{l}$ und einem Zufallsvektor $\boldsymbol{x}$ und $f(\boldsymbol{l})$ um einen Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}_x$ in eine Taylorreihe entwickelbar, so gilt für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung der Ansatz (5.14) für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{xx}$ mit den Varianzanteilen 1. und 2. Ordnung am Linearisierungspunkt $\boldsymbol{l}_0$, falls als fixer Approximationsvektor $\boldsymbol{l}_0$ bzw. $\boldsymbol{\xi}_0$ der Mittelwertvektor $E(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l}_0$ gewählt werden kann, wie ab (5.6) bzw. (5.4d) eingeführt (GRAFAREND & SCHAFFRIN 1993).

Der stochastische Verzerrungseffekt 2. Ordnung ergibt sich in seiner quadratischen Form daraus durch Subtraktion des auf die 1. Ordnung beschränkten Terms

$$\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T \tag{5.15a}$$

zu:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2}) = \\ \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{\boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T + \\ \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \\ \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T\end{gathered} \tag{5.15b}$$

5.3.5 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit normalverteilten skalarwertigen Beobachtungen

Der Parameterbias 2. Ordnung nach (5.7) ergibt sich für normalverteilte Beobachtungen aufgrund der Identität (A.5.3.1a) zu

$$b_x(2) = \frac{1}{2} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * \sigma_l^2 \tag{5.16}$$

Der stochastische Verzerrungseffekt 2. Ordnung (5.8) ergibt sich für normalverteilte Beobachtungen aufgrund der Identitäten (A.5.3.1c) und (A.5.1.6a) zu

$$\sigma_x(2) = \frac{3}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0}\right)^2 * \sigma_l^4 \tag{5.17}$$

5.3.6 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für skalare Funktionen mit normalverteilten vektorwertigen Beobachtungen

Der Parameterbias 2. Ordnung nach (5.10) lässt sich mit der Identität (5.12) auch schreiben als

$$b_x(2) = \frac{1}{2} * E\left\{\left.\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\right|_{l_0} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})\right\} = \frac{1}{2} * \left.\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\right|_{l_0} * E\{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}\}$$

und ergibt sich für normalverteilte Beobachtungen aufgrund der aus den Identitäten (A.5.3.1a) und (A.5.3.1b) resultierenden Identität $E\{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}\} = vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})$ zu

$$b_x(2) = \frac{1}{2} * \left.\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\right|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}}) \tag{5.18}$$

Es ist zu beachten, dass es sich bei den Formen $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ und $vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})$ jeweils um Spaltenvektoren und bei der Vektorisierungsvorschrift $vec(\,)$ nicht um eine mathematische sondern um eine Pseudocode-darstellung handelt.

Hinsichtlich des stochastischen Verzerrungseffekts 2. Ordnung gelten folgende Überlegungen:

Im ersten und zweiten Summand von (5.11) treten in Produktbildungen mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ und dem Kronecker-Produkt $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ Erwartungswerte (von teilweise gemischten Momenten) der maximal bivariaten Normalverteilung auf, für die folgende Identitäten zu berücksichtigen sind (Anhänge 5.1.4 und 5.2.6):

$$E\{\varepsilon_a^3\} = 0 \ \text{(Schiefe)} \tag{5.19a}$$

$$E\{\varepsilon_a^2 * \varepsilon_b\} = 0 \tag{5.19b}$$

$$E\{\varepsilon_a * (\varepsilon_b * \varepsilon_c)\} = 0 \tag{5.19c1}$$

$$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b) * \varepsilon_c\} = 0 \tag{5.19c2}$$

Damit entfallen der erste und zweite Summand aus Beziehung (5.11) und es gilt mit der Identität $E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\}$

$$= vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}}) * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right)\right)^T$$

aus Anhang 5.3 für den stochastischen Verzerrungseffekt 2. Ordnung nach (5.11)

$$\sigma_x^2(2) = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0}$$

$$* \left(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T \right)$$

$$* \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0}^{\ T}$$

(5.20)

Es ist zu beachten, dass es sich bei der Eliminierungsvorschrift für alle Matrixelemente außerhalb der Hauptdiagonalen $diag(diag(\,))$ ebenso nicht um eine mathematische sondern um eine Pseudocode-darstellung handelt.

5.3.7 Verzerrungseffekte 2. Ordnung für vektorwertige Funktionen mit normalverteilten Beobachtungen

Der Parameterbias 2. Ordnung gemäß (5.18) gilt hier analog, da die beteiligte Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_V^2 f(l)}$ lediglich in eine Form mit mehr als einer Zeile und somit dieser Bias $\boldsymbol{b_x(2)}$ von einem Skalar in einen Spaltenvektor übergeht:

$$\boldsymbol{b_x(2)} = \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) \tag{5.21}$$

Der stochastische Verzerrungseffekt 2. Ordnung ergibt sich denselben Übergängen bezüglich der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_V^2 f(l)}$ folgend gemäß (5.20) bei einhergehendem Übergang des skalaren Varianz-anteils $\sigma_x^2(2)$ auf den Kovarianzmatrixanteil $\boldsymbol{C_{xx}(2)}$ als Zielgröße

$$\boldsymbol{C_{xx}(2)} = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0}$$

$$* \left(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T \right)$$

$$* \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0}^{\ T}$$

(5.22)

5.3.8 Übersicht der hier gefundenen Verzerrungseffekte 2. Ordnung

Die hier gefundenen geometrischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung beziehen sich stets auf einen mittelwertigen Approximations- bzw. Linearisierungspunktvektor $\boldsymbol{l_0} = E(\boldsymbol{l})$ und gelten für Beobachtungen einer beliebig symmetrischen Dichtefunktion sowie für den daraus abgeleiteten Spezialfall normalverteilter Beobachtungen.

Tab. (5.3) Übersicht der hier gefundenen geometrischen (b_x) und stochastischen $(\boldsymbol{C})$ Verzerrungseffekte 2. Ordnung:

Dichtefunktion:		beliebig symmetrisch		normalverteilt	
Approximationsvektor l_0:		$l_0 = E(l)$			
Beobachtung	Parameter	b_x	$\boldsymbol{C}$	b_x	$\boldsymbol{C}$
Skalar	Skalar	(5.7)	(5.8)	(5.16)	(5.17)
Vektor	Skalar	(5.10)	(5.11)	(5.18)	(5.20)
Vektor	Vektor	(5.13)	(5.15b)	(5.21)	(5.22)

b_x : Geometrischer Verzerrungseffekt $b_x(2)$

$\boldsymbol{C}$: Stochastischer Verzerrungseffekt $\sigma_x^2(2)$ bzw. $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$

5.4 Auswertung vorliegender Quellen zu Verzerrungseffekten 2. Ordnung

Für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung gibt die vorliegende Quelle GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) den Parameterbias und den stochastischen Verzerrungseffekt 2. Ordnung für skalare Funktionen mit skalarwertigen Beobachtungen und für vektorwertige Funktionen jeweils bezogen auf den allgemeinen Fall und spezialisiert auf den Fall, dass als Reihen-Entwicklungspunkt $\boldsymbol{l_0}$ bzw. $\boldsymbol{\xi_0}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Erwartungswert $E(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l_0}$ gewählt werden kann und normalverteilte Beobachtungen vorliegen, an.

Für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung gibt der auf den Reihenentwicklungspunkt $\boldsymbol{l_0} = E(\boldsymbol{l})$ bezogene und für skalare Funktionen mit vektorwertigen Beobachtungen geltende Beitrag von TEUNISSEN (1989) den Parameterbias 2. Ordnung an. TEUNISSEN (1989) zeigt für den inversen Fall den beobachtungsbezogenen Bias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_{\tilde{l}}}(\boldsymbol{2})$ in Abhängigkeit jenes Parameterbias $\boldsymbol{b_{\tilde{x}}}(\boldsymbol{2})$.
Ferner wird der Parameterbias 2. Ordnung für die nichtlineare Fortpflanzung beobachtungsbezogener systematischer Fehleranteile gezeigt.

Tab. (5.4) Übersicht zur Quellenlage bezüglich des geometrischen und des stochastischen Verzerrungseffekts 2. Ordnung:

Dichtefunktion:		beliebig symmetrisch			beliebig symmetrisch			normalverteilt		
Approximationsvektor $\boldsymbol{l_0}$:		beliebig			$\boldsymbol{l_0} = E(\boldsymbol{l})$			$\boldsymbol{l_0} = E(\boldsymbol{l})$		
Beobachtung	Parameter	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Skalar	Skalar		b_x, $\boldsymbol{C}$		b_x, $\boldsymbol{C}$			b_x, $\boldsymbol{C}$	b_x, $\boldsymbol{C}$	
Vektor	Skalar				b_x, $\boldsymbol{C}$		b_x	b_x, $\boldsymbol{C}$		
Vektor	Vektor		b_x, $\boldsymbol{C}$		b_x, $\boldsymbol{C}$			b_x, $\boldsymbol{C}$	b_x, $\boldsymbol{C}$	

Die ausgewerteten Quellen sind in Tabelle (5.4.) gemäß folgender Nummerierung angegeben:

(1) : Diese Arbeit
(2) : GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993)
(3) : TEUNISSEN (1989)

Die verwendeten Abkürzungen zeigen die Art des Verzerrungseffekts 2. Ordnung:

b_x : Verzerrung $b_x(2)$ des Schätzwertes gegenüber dem wahren Wert bzw. dem Erwartungswert
$\boldsymbol{C}$: Stochastischer Verzerrungseffekt $\sigma_x^2(2)$ bzw. $\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{2})$

In rot gekennzeichnete Herleitungen sind fehlerbehaftet. Sie betreffen ausschließlich die Quelle GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993). Die zugehörigen Falsifizierungen sind für den stochastischen Verzerrungseffekt $\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{2})$ vektorwertiger Funktionen im Anhang 5.4.2 aufgezeigt.

Für die drei übrigen auf eine skalare Beobachtung und einen skalaren Parameter bezogenen Verzerrungseffekte (Verzerrung $b_x(2)$ für Beobachtungen mit beliebig symmetrischer Dichtefunktion und stochastischer Verzerrungseffekt für ebensolche und normalverteilte Beobachtungen) sind die Falsifizierungen in Anhang 5.4.3 gezeigt.

Für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung gibt die Quelle MEKID & VAJA (2007) die systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte für die Anteile 2. und 3. Ordnung und den Fall eines skalaren Parameters x und einer skalaren Zufallsvariable l (Einzelbeobachtung) mit beliebiger – auch nicht zwingend symmetrischer – Dichtefunktion an.
Die zugehörigen Ergebnisse sind in Anhang 5.6 in Tabelle (A.5.6.1) für die 2. Ordnung und in Tabelle (A.5.6.2) für die 3. Ordnung aufgeführt. Sie stimmen für die 2. Ordnung im Falle des systematischen Verzerrungseffekts $b_x(2)$ mit den Ergebnissen dieser Arbeit überein; im Falle des stochastischen Verzerrungseffekts ist das Ergebnis von MEKID & VAJA (2007) bezüglich des Kurtosis-Parameters – wie in Anhang 5.6 gezeigt – zu korrigieren.

5.5 Wirkung der Varianzanteile 2. Ordnung

Wirkungen von Varianzanteilen höherer Ordnung setzen stets ein nichtlineares Modell $f(\boldsymbol{l})$ zur Abbildung der Beobachtungen in den Parameterraum gemäß (5.1) bzw. (5.3) voraus, dessen Linearisierung anhand einer nach dem ersten Reihenglied abgebrochenen Taylorreihe erfolgt.
Nach Tab. (5.1) treten diese Wirkungen für den nicht überbestimmten und für den Redundanzfall sowohl in deterministisch-systematischer Form eines Parameterbias als geometrische Netzverzerrungseffekte (Kapitel 5.5.1) wie auch in stochastischer Form (Kapitel 5.5.2) als Vernachlässigung für die Kovarianzmatrix der Parameter (stochastischer Netzverzerrungseffekt) auf.
Für den deterministisch-systematischen Parameterbias 2. Ordnung lassen sich die deterministisch-systematisch induzierte (A.5.5.5c) und die stochastisch induzierte Form (5.24) unterscheiden.
Es lassen sich Zusammenhänge zwischen den deterministisch-systematischen und den stochastischen Nichtlinearitätsverzerrungen zeigen (Kapitel 5.5.4).

5.5.1 Effekte 2. Ordnung auf die Momente 1. Ordnung von Parametern

Grundlage der Effekte 2. Ordnung auf den Moment 1. Ordnung eines Parameters x bildet die Taylorreihenentwicklung am Punkt $x_0 = f(l_0)$ nach TEUNISSEN (1989) gemäß (A.5.5.4b); darin ist ohne Beschränkung des allgemeinen Falles x an der Erwartungswertstelle $E\{l\}$ entwickelbar: $x_0 = f(E\{l\})$.

TEUNISSEN (1989) führt die Differenz zwischen diesem als (quasi-) wahrer bzw. *Idealwert* gesuchten Ergebnis $f(E\{l\})$ und dem Schätzergebnis $E\{f(l)\}$ ein als Parameterbias $b_x = f(E\{l\}) - E\{f(l)\}$, der sich mit Berücksichtigung des o.a. Entwicklungspunktes $x_0 = f(E\{l\})$ ergibt zu $b_x = x_0 - E\{f(l)\}$; mit $x_0 = f(E\{l\}) = E\{f(E\{l\})\} = E\{x_0\}$ lässt sich b_x auch schreiben als $b_x = E\{x_0\} - E\{f(l)\}$.

Nach Subtraktion des Funktionswertes $f(l)$ auf beiden Seiten in (A.5.5.4b) ergibt sich – zunächst beschränkt auf skalarwertige Zufallsvariable l und x und damit auf einen 1x 1 Vektor $(l - l_0)$

$$x_0 - f(l) \;=\; \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (l - l_0) + \frac{1}{2} * (l - l_0)^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * (l - l_0)$$

und mit dem Übergang auf die Erwartungswerte mit $b_x = E\{x_0\} - E\{f(l)\}$ weiter der Parameterbias für die 1. und 2. Ordnung

$$\begin{aligned} b_x(1+2) &= E\left\{\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (l - l_0) + \frac{1}{2} * (l - l_0)^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * (l - l_0)\right\} \\ &= \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * E\{l - l_0\} + \frac{1}{2} * E\left\{(l - l_0)^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * (l - l_0)\right\} \end{aligned}$$

Mit Einführung der normalverteilten Beobachtung l des mittleren bzw. wahren Wertes $l_0 = \tilde{l}$ und so von $(l - l_0)$ als stochastische Größe – kontrastierend zur Einführung von $l - l_0$ als Summe aus einem

zufälligen (ε) und einem systematischem Fehleranteil (∇l) an gleicher Stelle in Anhang 5.5.3 – folgt mit dem Erwartungswert $E\{l - \tilde{l}\} = 0$

$$b_x(1+2) = b_x(2) = \frac{1}{2} * E\left\{\left(l - \tilde{l}\right)^T * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \left(l - \tilde{l}\right)\right\} = \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \sigma_{\underline{l}}^2$$

Die vorstehende Form des Parameterbias 2. (2) Ordnung stimmt mit der Beziehung (C31)

$$b_x(2) = \frac{1}{2} * D_Q^2 f(l) * \sigma_{\underline{l}}^2 \tag{5.23}$$

nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für den Fall ebenfalls skalarwertiger Zufallsvariabler l und x und mit $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)}$ als 1x 1 Matrix überein. Anhand dieses Falles lässt sich unter der Voraussetzung eines nichtlinearen funktionalen Modells f und daher $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} \neq \boldsymbol{0}$ mit $\sigma_{\underline{l}}^2 > 0$ bereits unmittelbar zeigen, dass $b_x(2) \neq 0$.

Die Erweiterung dieses nicht überbestimmten Falls auf die vektorwertige Zufallsvariable $\boldsymbol{l}$ führt mit $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)}$ gemäß (5.9a) unmittelbar zur Beziehung (A.5.5.14b) nach TEUNISSEN (1989)

$$b_x(2) = -\frac{1}{2} * spur\left(\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{C_{ll}}\right) \tag{A.5.5.14b}$$

und stellt den auf der Nichtlinearität des funktionalen Modells f beruhenden parameterbezogenen und aus den Anteilen 2. Ordnung induzierten Bias (2. Ordnung) $b_x(2)$ dar, für den im Falle eines linearen Modells f wegen $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} = \boldsymbol{0}$ folgt $b_x(2) = 0$.

Grundsätzlich weichen also nach Beziehung (A.5.5.5a) die geschätzten Parameter $E\{\boldsymbol{x}\}$ um diesen Bias $\boldsymbol{b_x(2)} \neq 0$ von ihren wahren Werten $f(E\{\boldsymbol{l}\})$ ab, falls f nichtlinear. Diese Abweichung muss jedoch darüber hinaus um die hier unberücksichtigt gebliebenen Terme ab der 3. Ordnung erweitert werden.

TEUNISSEN (1989) gibt in Beziehung (A.5.5.14a) auch den zugehörigen beobachtungsbezogenen Bias an, vgl. Anhang 5.5.5:

$$\boldsymbol{b_l(2)} = \boldsymbol{Q_{ll}} * \boldsymbol{Df(l)}^T * \boldsymbol{Q_{xx}^{-1}} * \boldsymbol{b_x(2)} \tag{A.5.5.14a}$$

(A.5.5.14a) ist die Inversion der für die 2. Ordnung gültigen Wirkung der beobachtungsbezogenen Anteile 2. Ordnung auf die Parameter: $\boldsymbol{b_x(2)} = -\boldsymbol{F} * \boldsymbol{b_l(2)}$ mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q_{xx}} * \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{P_{ll}}$. In der Form von (A.5.5.14a) ist dieses Gesetz lediglich auf den Beobachtungs- und den Parameterbias 2. Ordnung in der Art systematischer Fehleranteile angewendet.

Analog zu Beziehung (A.5.5.14b) nach TEUNISSEN (1989) und für gleichermaßen normalverteilte Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ jedoch für eine vektorwertige Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ ergibt sich durch Subtraktion des Funktionswertes $g(\boldsymbol{\mu_x}) = f(E\{\boldsymbol{l}\})$ in (C36) aus GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) mit $E\{\boldsymbol{y}\} = E\{\boldsymbol{x}\}$:

$$\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2}) = E\{\boldsymbol{x}\} - f(E\{\boldsymbol{l}\}) = E\{f(\boldsymbol{l})\} - f(E\{\boldsymbol{l}\}) = \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) \tag{5.24}$$

Diese Darstellung des Parameterbias $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ ergibt sich unmittelbar aus Beziehung (A.5.5.14b), falls die Hesse-Matrix in ihre Form gemäß (5.9b) übergeht.

5.5.2 Effekte 2. Ordnung auf die Momente 2. Ordnung von Parametern (Parameterstochastik)

Die stochastische Wirkung der Varianzanteile 2. Ordnung auf die Parameter wurde als nichtlineare Varianzenfortpflanzung für den nicht überbestimmten Fall mit der Form der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})$ nach (5.9c) in den Kapiteln 5.3.4 und 5.3.7 dieser Arbeit gefunden zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2}) \; = \; & \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0} * (vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + \\ & 2 * vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big) * \Big(vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big)\Big)^T\Big) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0}{}^T \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.5.3 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten der Anteile 2. Ordnung

Die Effekte 2. Ordnung auf die Momente 1. und 2. Ordnung eines zu schätzenden Parameters $\boldsymbol{x}$ sind außer durch die Nichtlinearität der Funktion $f(\boldsymbol{l})$ noch stets durch die Stochastik der Zufallsvariablen $\boldsymbol{l}$ induziert. Wie Anhang 5.5.3 entnehmbar zeigt TEUNISSEN (1989) den sich aus der Einführung einer beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Verzerrung $\boldsymbol{\nabla_l}$ ergebenden Effekt 2. Ordnung auf das Moment 1. Ordnung von $\boldsymbol{x}$, der somit als *deterministisch-systematisch induziert* bezeichnet werden kann; die ausschließlich auf der Stochastik von $\boldsymbol{l}$ beruhenden Effekte 2. Ordnung sind hingegen als *stochastisch induziert* zu bezeichnen.

Die Ermittlung des Parameterbias $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ erfolgt für den nicht überbestimmten Fall gemäß Beziehung (5.24) nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine vektorwertige Zufallsvariable $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})$ nach (5.9c); (A.5.5.14b) nach TEUNISSEN (1989) gilt hingegen für eine skalarwertige Zufallsvariable x mit $\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a).

Der Parameterbias $\boldsymbol{b_x^{(+)}}(\mathbf{2})$ als Verzerrungswirkung der Varianzanteile 2. Ordnung ist lediglich über die Beziehung (A.5.5.5c) deterministisch-systematisch induziert, in den übrigen Fällen ist $\boldsymbol{b_x^{(+)}}(\mathbf{2})$ stochastisch induziert.

Für eine beliebige Dichtefunktion der nur skalarwertigen Zufallsvariablen l und x und den nicht überbestimmten Fall sind die Effekte 2. Ordnung auf die Momente 1. und 2. Ordnung in Tab. (A.5.6.1) im Anhang 5.6 angegeben.

Tab. (5.5) Effekte 2. Ordnung der vektorwertigen Zufallsvariablen $\boldsymbol{l}$ auf die Momente 1. und 2. Ordnung der Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$ für den nicht überbestimmten Fall:

Redun -danz	Effekte 2. Ordnung auf das Moment 1. Ordnung (Verzerrung der Erwartungswerte)	Effekte 2. Ordnung auf das Moment 2. Ordnung
$r = 0$	Stochastisch induziert: $b_x(2) = -\frac{1}{2} * spur\left(\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C_{ll}}\right)$ (A.5.5.14b) $\boldsymbol{b_x}(\boldsymbol{2}) = \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})$ (5.24) Deterministisch-systematisch induziert: $\boldsymbol{b_x}(\boldsymbol{2}) = \frac{1}{2} * \left(\boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})\right) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\nabla_l} \otimes \boldsymbol{\nabla_l})$ (A.5.5.5c) $\boldsymbol{b_l}(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{Q_{ll}} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T * \boldsymbol{Q_{xx}^{-1}} * \boldsymbol{b_x}(\boldsymbol{2})$ (A.5.5.14a)	Stochastisch induziert: $\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{2}) = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big\|_{l_0} * \Big(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\Big) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big\|_{l_0}{}^T$ (5.22)

5.5.4 Zusammenhänge zwischen deterministisch-systematischer und stochastischer Wirkung der Anteile 2. Ordnung

Vorbereitend sei die Beziehung (5.22) zur Ermittlung der Varianzanteile 2. Ordnung $\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{2})$ der Varianzenfortpflanzung in die Summe zweier quadratischer Matrizen zerlegt:

$$\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{2}) = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * \left(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right)$$

$$* \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^{T}$$

$$= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}}) * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^{T}$$

$$+ \frac{2}{4} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right)\right)^T * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}{}^{T}$$

Die auftretenden transponierten Terme lassen sich paarweise zusammenfassen:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2}) =$$

$$\frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}}) * \left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)^T$$

$$+ \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right) * \left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right)\right)^T \tag{5.25a}$$

Mit dem Übergang auf Beziehung (5.25b) wird die Darstellung von $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2})$ in Form einer Summe zweier dyadischer Produkte vollzogen:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2}) =$$

$$\left(\frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right) * \left(\frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0} * vec(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)^T$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right)\right) \tag{5.25b}$$

$$* \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{V}}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})\right)\right)\right)^T$$

Mit jenen Anteilen stellt $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2})$ stets eine Rang-2-Matrix dar, deren natürliche Hauptschwachform so bereits das Fehlerbudget der Anteile 2. Ordnung weitgehend abbildet. Infolgedessen stellt das Produkt $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{1})^{-1} * \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2})$ unabhängig des Ranges von $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{1})$ gleichfalls eine Rang-2-Matrix dar mit λ_1 und λ_2 als den einzigen von Null verschiedenen Eigenwerten des speziellen EWP dieses Produkts, welche nach ZURMÜHL & FALK (1984) mit den einzigen nicht nullgleichen Eigenwerten des zugehörigen allgemeinen EWP mit $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2})$ als Vergleichs- und $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{1})$ als Referenzkovarianzmatrix identisch sind. Dadurch lässt sich die Vergleichskovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2})$ ausgehend von der Beziehung (2.15b) mit den zu λ_1 und λ_2 gehörenden transformierten Eigenvektor $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_1}}$ und $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_2}}$ der Matrix $\overline{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{X}^{-1})^T$ (mit $\boldsymbol{X}$ = originäre Modalmatrix des AEWP) trägerfunktionsabhängig bilden zu

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{2}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_1}} * \lambda_1 * \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_1}}^T + \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_2}} * \lambda_2 * \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\lambda_2}}^T$$

$$\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2}) = \left(\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1}\right) * \left(\sqrt{\lambda_1} * \overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1}^T\right) + \left(\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_2} * \sqrt{\lambda_2}\right) * \left(\sqrt{\lambda_2} * \overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_2}^T\right) \tag{5.25c}$$

Mit der Darstellung des Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})$ gemäß (5.24) geht (5.25b) über in die Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2}) \; = & \\ & \boldsymbol{b}_x(\mathbf{2}) * \boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})^T \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \boldsymbol{D}_V^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right)\right) \\ & * \left(\frac{1}{\sqrt{2}} * \boldsymbol{D}_V^2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right)\right)^T \end{aligned} \tag{5.25d}$$

und führt über die formale Analogie zwischen (5.25c) und (5.25d) mit jeweils zwei als dyadische Produkte auftretenden Summanden auf die Äquivalenz

$$\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2}) * \boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})^T = \left(\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1}\right) * \left(\sqrt{\lambda_1} * \overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1}^T\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1} \tag{5.26a}$$

und aufgrund der ausschließlich quadratischen Produktbildung in (5.25c) und (5.25d) und der sich daraus ergebenden Uneindeutigkeit der Vorzeichensituation ebenfalls auf die Äquivalenz

$$\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2}) = -\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1} \tag{5.26b}$$

Dies führt auf die lineare Abhängigkeit zwischen geometrischer Verzerrungswirkung des Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})$ und stochastischer Verzerrungswirkung der latenten Hauptschwachform $\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1}$ aus dem allgemeinen AEWP. Jene lineare Abhängigkeit gibt den quantitativen Zusammenhang zwischen der latenten Hauptschwachform $\overline{\boldsymbol{x}}_{\lambda_1} * \sqrt{\lambda_1}$ und dem Parameterbias $\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})$ an und zeigt so implizit, dass diese Größen im qualitativen Merkmal ihrer geometrischen Ausrichtung koinzidieren.

Es ist aber zu beachten, dass sich der zugehörige Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2})$ gemäß Beziehung (5.22) nicht ausschließlich aus dem dyadischen Produkt des Parameterbias (5.24) mit sich selbst als dessen quadratische Form ergibt, da nach Beziehung (5.25b) bzw. (5.25d) noch ein weiterer Summand als ebenfalls dyadisches Produkt zur Bildung von $\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2})$ besteht.

Der in Kapitel 5.7.2 betrachtete einseitig angeschlossene Polygonzug bestätigt die hier gefundenen Zusammenhänge zwischen deterministisch-systematischer und stochastischer Wirkung der Anteile 2. Ordnung. Insbesondere koinzidieren der stochastisch induzierte Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b}_x(\mathbf{2})$ und die latente Hauptschwachform, dessen zugehörige quadratische Form mit einen Anteil von 93.2 % an

der verallgemeinerten stochastischen quadratischen Netzverzerrung den Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ und damit das Budget der Varianzanteile 2. Ordnung klar dominiert.

5.6 Analogiebetrachtungen

Für die Anteile 2. Ordnung können folgende Analogien gefunden werden:

- Analogien hinsichtlich der Fortpflanzung der deterministischen und stochastischen Anteile 1. und 2. Ordnung
- Analogie der Anteile 2. Ordnung zu den nicht zufälligen Varianzanteilen des geometrischen Nivellements

5.6.1 Analogien im Bereich der Anteile 1. und 2. Ordnung

Prinzipiell lässt sich die beliebige differentiell kleine und auf die einzelnen Beobachtungen bezogene Größe Δl formal als beobachtungsbezogener Fehleranteil dl interpretieren, der im Zusammenhang mit der Fehlerfortpflanzung in den Parameterraum (dx) noch auf spezielle Eigenschaften festzulegen ist. So lässt sich die Größe dl entweder als deterministisch-systematischer Fehleranteil (Anhang 5.5.3) mit einem Erwartungswert $E\{dl\} = E\{\nabla_l\} \neq 0$ oder als stochastischer Varianzanteil (Kapitel 5.5.1) interpretieren, welcher für L2-Norm-Schätzungen als skalar- oder vektorwertige Zufallsvariable mit $E\{dl\} = E\{\varepsilon\} = 0$ (quasi-) normalverteilt ist.

5.6.1.1 Fortpflanzung der beobachtungsbezogenen systematischen Fehleranteile

Für den nicht überbestimmten Fall erfolgt die Fortpflanzung deterministisch-systematischer Anteile $\boldsymbol{\nabla_l}$ (*Beobachtungsbias*) zum *Parameterbias* für die 1. Ordnung linear anhand der Jacobi-Matrix $\boldsymbol{Df(l)}$, welche die partiellen Ableitungen $f'(\boldsymbol{l})$ und damit das Modell $f(\boldsymbol{l})$ linearisiert enthält:

$$\boldsymbol{\nabla x} = \boldsymbol{Df(l)} * \boldsymbol{\nabla_l} \tag{5.27a}$$

Mit $\boldsymbol{b_l} = \boldsymbol{\nabla_l}$ und $\boldsymbol{b_x} = \boldsymbol{\nabla x}$ als Bezeichnungen aus Tabelle (5.6) lässt sich äquivalent schreiben

$$\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df(l)} * \boldsymbol{b_l} \tag{5.27b}$$

Zur Ermittlung des Parameterbias $\boldsymbol{b_x}$ stellt für die Anteile 1. Ordnung der Beobachtungsbias $\boldsymbol{b_l}$ das Argument der Fehlerfortpflanzungsfunktion dar; für die Anteile 2. Ordnung bildet gemäß Beziehung (A.5.5.5c) die Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$ und das dyadische Produkt $\boldsymbol{\nabla_l} * \boldsymbol{\nabla_l^T}$ gemäß Anhang 5.5.3 das Funktionsargument für den deterministisch-systematisch induzierten Parameterbias. Die Transformation des Funktionsargumentes $\boldsymbol{b_l}$ für die Anteile 1. Ordnung erfolgt nach (5.27b) über die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{Df(l)}$; für die Anteile 2. Ordnung werden die Funktionsargumente $\boldsymbol{C_{ll}}$ und $\boldsymbol{\nabla_l} * \boldsymbol{\nabla_l^T}$ nach (A.5.5.5c) über die Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2f(l)}$ transformiert. Für beide Ordnungen erfolgt daher die Transformation des jeweiligen Funktionsargumentes in den Parameterraum zum Parameterbias zwar linear, für die 2. Ordnung aber nicht mit den beobachtungsbezogenen Fehleranteilen in ihrer einfachen sondern in ihrer quadratischen Form.

5.6.1.2 Fortpflanzung der parameterbezogenen systematischen Fehleranteile

Für L2-Norm-Schätzungen ergibt sich die Beziehung zwischen dem (parameterbezogenen) differentiellen Zuschlag $\boldsymbol{dx}$ und den zugehörigen Größen aus dem Beobachtungsraum insbesondere aus der Bestimmungsgleichung für die (beobachtungsbezogenen) Verbesserungen $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{dx} - (\boldsymbol{l} - M\{\boldsymbol{l}\}) \tag{5.28}$$

Darin stellt die Form $(\boldsymbol{l} - M\{\boldsymbol{l}\})$ vorzeichengerecht den sog. *Vektor der gekürzten Beobachtungen* dar, der sich aus der Differenz zwischen dem Vektor der originalen Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ und dem zugehörigen aus der Netzgeometrie der jeweiligen Iteration ermittelbaren Vektor für $\boldsymbol{l}$ ergibt. Dieser Subtrahend istder Schätzwertvektor $M\{\boldsymbol{l}\}$ einer M-Schätzung im Sinne eines Sollwertvektors, ohne dabei jedoch mit dem Erwartungswertvektor $E\{\boldsymbol{l}\}$ identisch zu sein. Der Parameterzuschlag $\boldsymbol{dx}$ erzeugt über bekannte Matrixalgebra die L2-Norm-Lösung $E\{f(\boldsymbol{l})\} = f(\boldsymbol{l}) + \boldsymbol{dx} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = E\{f(\boldsymbol{l})\} - f(\boldsymbol{l})$ und ist so gemäß Definition (A.5.5.5a) identisch mit dem Parameterbias 1. Ordnung: $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$. Im jene Betrachtungen nicht belastenden Spezialfall widerspruchsfreier Beobachtungen geht (5.28) mit $\boldsymbol{v} = 0$ über in $\boldsymbol{dl} = \boldsymbol{l} - M\{\boldsymbol{l}\} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{A} * \big(E\{f(\boldsymbol{l})\} - f(\boldsymbol{l})\big)$ und so in eine Form gegensätzlicher Vorzeichenregelungen zwischen den Gleichungsseiten, jeweils mit Beteiligung eines Ist- und eines Soll-Wertes.

Für die weitere Überführung dieser Form auf den Beobachtungs- und den Parameterbias nimmt die rechte, parameterbezogene Seite den Term $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$ an; auf der linken, beobachtungsbezogenen Seite ist konform zur Vorzeichenregelung von (A.5.5.5a) des Parameterbias $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$ der Beobachtungsbias $\boldsymbol{b_l}$ gemäß (A.5.5.6) einzuführen, auch wenn Gegensätzlichkeit zur Vorzeichenregelung von $\boldsymbol{dl}$ besteht, da ausschließlich ein Zusammenhang zwischen einem Beobachtungs- und einem Parameterbias vorliegt:

$$\boldsymbol{b_l}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) \tag{5.29}$$

Reversibilität der beobachtungs- und parameterbezogenen systematischen Fehleranteile 1. Ordnung:

Die Fortpflanzung beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehleranteile $\boldsymbol{b_l}$ nach der 1. Ordnung in den Raum der Parameter ist umkehrbar eindeutig, falls die Designmatrix $\boldsymbol{A}$ vollen Rang hat, da in jenem Fall deren eindeutige Gauß'sche Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert und Abbildung $f(\boldsymbol{l})$ bijektiv ist:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) \tag{5.30a}$$

Dies trifft beispielsweise für ausschließlich skalarwertige beobachtungsbezogene Zufallsvariable aller Einzelabbildungen einer Ortungsaufgabe mit der Designmatrix $\boldsymbol{A}$ als Diagonalenmatrix zu, ist jedoch nicht darauf beschränkt.

Die beiden Formen (5.27b) $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{b_l}$ und (5.29) $\boldsymbol{b_l} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$ sind für eine eindeutige Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ äquivalent, wie sich durch Einsetzen von (5.29) in (5.27b) unter Berücksichtigung von (5.30a) zeigen lässt:

$$\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{b_l} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$$

In allen anderen Fällen – und damit auch im Ausgleichungsfall – ist die umgekehrte Fortpflanzung der deterministisch-systematischen Fehleranteile 1. Ordnung vom Parameter- in den Beobachtungsraum nicht anhand einer Inversion der Abbildungsbeziehung $f(\boldsymbol{l})$ bzw. $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$ sondern nur mit der eigenständigen Beziehung (5.29) darstellbar und es gilt

$$\boldsymbol{A}^{-1} \neq \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) \tag{5.30b}$$

da eine rangdefekte Matrix $\boldsymbol{A}$ – wie z.B. deren nicht-quadratische Form im Ausgleichungsfalle – keine eindeutige Gauß'sche Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ aufweist.

Der Parameterbias wird für die Anteile 1. Ordnung nach Beziehung (5.29) immer und für die Anteile 2. Ordnung nach Beziehung (A.5.5.14a) im nicht überbestimmten Fall in seiner einfachen Form ($\boldsymbol{b_x}$) in die Fehlerfortpflanzung eingeführt.

Die Transformation des Funktionsargumentes $\boldsymbol{b_x}$ erfolgt für die Anteile 1. Ordnung stets anhand der Designmatrix $\boldsymbol{A}$ und für die Anteile 2. Ordnung im nicht überbestimmten Fall anhand des Terms $\boldsymbol{Q_{ll}} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T * \boldsymbol{Q_{xx}^{-1}}$. Für beide Ordnungen wird der systematische Parameterbias $\boldsymbol{b_x}$ linear in den Beobachtungsraum zum systematischen Beobachtungsbias $\boldsymbol{b_l}$ transformiert.

5.6.1.3 Fortpflanzung der beobachtungsbezogenen stochastischen Fehleranteile

Die stochastische Wirkung geht für den nicht überbestimmten Fall als parameterbezogene Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1})$ aus Beziehung (5.15a) mit der für normalverteilte Beobachtungen gültigen Identität $E\{\boldsymbol{dl} * \boldsymbol{dl}^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \boldsymbol{C_{ll}}$ hervor:

$$\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C_{ll}} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T \tag{5.31a}$$

Für den nicht überbestimmten Fall gilt ebenfalls die Identität (5.30a) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$ und somit:

$$\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{C_{ll}} * (\boldsymbol{A}^{-1})^T \tag{5.31b}$$

Die beobachtungsseitigen zufälligen Fehler werden für die Anteile 1. Ordnung in ihrer quadratischen Form ($\boldsymbol{C_{ll}}$ bzw. $\boldsymbol{P_{ll}}$) und für die Anteile 2. Ordnung im nicht überbestimmten Falle nach (5.22) in einer ihrer vierten Potenz folgenden Form

$$(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T) \text{ bzw. } vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big) * \Big(vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big)\Big)^T$$

in die Varianzenfortpflanzung als Funktionsargumente eingeführt.
Die Transformation dieser Argumente in den Parameterraum erfolgt für beide Ordnungen über eine symmetrische Produktbildung und für die 1. Ordnung im Ausgleichungsfall zusätzlich über eine Inversion dieses Produkts. An den Produktbildungen sind neben den beobachtungsseitigen Varianzanteilen für die 1. Ordnung nur die Designmatrix $\boldsymbol{A}$ bzw. deren Inverse, die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$, und für die 2. Ordnung im nicht überbestimmten Falle nur die Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})$ beteiligt.

Für die voraussichtliche Größenordnung der parameterbezogenen Varianzanteile 2. Ordnung – speziell relativ zur Größenordnung der zufälligen konventionellen Anteile (1. Ordnung) – seien folgende Überlegungen in Ansatz gebracht:

Für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung werden die zufälligen Anteile 2. Ordnung im Gegensatz zu den konventionellen Anteilen und in geometrischer Deutung nicht gemäß Beziehung (5.31a) durch die (auf Linearisierungspunkt $\boldsymbol{l_0}$ bezogene) Tangentensteigung $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$ der das Modell beschreibenden Funktion $f(\boldsymbol{l})$ sondern gemäß der Beziehung (5.22) durch die (ebenfalls auf den Linearisierungspunkt $\boldsymbol{l_0}$ bezogene) Krümmung $\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})$ dieser Funktion induziert. Jene Krümmung ist jedoch aufgrund der bereits von TEUNISSEN (1989) festgestellten und für die meisten in der Geodäsie verwendeten Modelle zutreffenden geringen Nichtlinearität von $f(\boldsymbol{l})$ – zumindest im differentiellen Bereich – kaum ausgeprägt. Es kann somit angesichts der aus dieser geringen Nichtlinearität resultierenden Matrixelemente von $\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})$ eine herabsetzende Wirkung für die zufälligen Anteile 2. Ordnung im Vergleich zu den Anteilen 1. Ordnung erwartet werden. Diese Wirkung verstärkt sich durch das quadratische Auftreten der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})$ in der symmetrischen Produktbildung zur Ermittlung der Anteile 2. Ordnung nach (5.22) – analog zur (quadratischen) Beteiligung der Jacobi-Matrix $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$ in der ebenfalls symmetrischen Produktbildung zur Ermittlung der Anteile 1. Ordnung nach (5.31a).
Ferner findet im Vergleich zu den konventionellen Anteilen durch die Verwendung einer der vierten Potenz der Beobachtungsgenauigkeiten entsprechenden Form in (5.22) eine zusätzliche numerische Verringerung der Anteile 2. Ordnung gegenüber den konventionellen Anteilen statt, deren Ermittlung nach (5.31a) auf der Einführung der Beobachtungsgenauigkeiten in ihrer zweiten Potenz beruht.
Eine steigernde Wirkung auf die zufälligen Anteile 2. Ordnung kann hingegen bei zunehmender Netzgröße erwartet werden, da sich damit die für die Anteile 2. Ordnung gemäß (5.22) größenwirksame Dimension der Hesse-Matrix exponentiell vergrößert und somit eine größere Anzahl von Matrixelementen an der Bildung der Anteile 2. Ordnung teilhaben.
Es ist daher eine Vergrößerung der Varianzanteile 2. Ordnung mit dem Umfang sowohl einer nicht überbestimmten Ortungsaufgabe als auch eines (im Allgemeinen überbestimmten) geodätischen Netzes zu erwarten.

5.6.1.4 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten der Anteile 1. Ordnung

Tab. (5.6) Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 1. Ordnung der vektorwertigen Zufallsvariablen $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{x}$ für den nicht überbestimmten Fall:

Redundanz	Deterministisch-systematische Wirkung	Stochastische Wirkung
$r = 0$	$\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{b_l}(\mathbf{1})$ (5.27b)	$\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C_{ll}} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T$ (5.31a)
	$\boldsymbol{b_l}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$ (5.29)	$\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{C_{ll}} * (\boldsymbol{A}^{-1})^T$ (5.31b)

$\boldsymbol{b_l}(\mathbf{1})$ = Beobachtungsbias 1. Ordnung

$\boldsymbol{b_x}(\mathbf{1})$ = Parameterbias 1. Ordnung

5.6.2 Analogie zu den nicht-zufälligen Fehleranteilen des geometrischen Nivellements

Das beobachtungsbezogene Fehlerbudget umfasst für das geometrische Nivellement neben den klassischen zufälligen und den stochastisch-systematischen (FAWAZ 1981) noch deterministisch-systematische Fehleranteile (JÄGER 1990), welche sich aufgrund der Linearität des funktionalen Modells des geometrischen Nivellements linear in den Parameterraum transformieren lassen und so als Bias deterministisch-systematisch auf die Parameter wirken.
Ein ebenfalls deterministisch-systematischer parameterbezogener Bias ergibt sich in Lagenetzen aufgrund des Abbruchs der linearisierenden Taylorreihe nach dem ersten Glied aus den vernachlässigten Anteilen 2. Ordnung und speist sich so im Gegensatz zu dem physikalisch induzierten deterministisch-systematischen Parameterbias im geometrischen Nivellement aus der Nichtlinearität des funktionalen Modells für geodätische Ortungsaufgaben in Lagenetzen (*Nichtlinearitätsverzerrung* des Erwartungswertes).

Im geometrischen Nivellement stellt die quadratische Form des Beobachtungsbias als sein dyadisches Produkt mit sich selbst einen beobachtungsbezogenen Kovarianzmatrixzuschlag dar, der jedoch nicht die allgemeinen Eigenschaften einer statistisch begründeten Kovarianzmatrix hat sondern auf einem Analogieschluss für Kovarianzmatrizen gemäß der Netzverzerrungstheorie beruht und noch über das funktionale Modell in den Parameterraum zu transformieren ist.

In Lagenetzen ergibt die Quadrierung des durch die Nichtlinearität des funktionalen Modells induzierten Parameterbias $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ gemäß (5.24) nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) ein mit dem ersten von zwei Teilen des parameterbezogenen Kovarianzmatrixzuschlags $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ nach (5.22) bzw. (5.25b) und (5.25d) übereinstimmendes dyadisches Produkt, das ebenso nicht die Eigenschaften einer statistisch begründeten Kovarianzmatrix trägt sondern auf der Vernachlässigung der Anteile aus der 2. Ordnung bei der Ermittlung der Parameter beruht und so als

quasi-systematisch

bezeichnet werden kann.

Die ausgeglichene Netzgeometrie ist mit der einfachen Form dieses Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ als Nichtlinearitätsverzerrung linearisierungsbedingt-systematisch belastet und ihre Stochastik um den Kovarianzmatrixzuschlag 2. Ordnung $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ – auf ebenfalls linearisierungsbedingt-systematische Weise – vernachlässigt.

5.7 Größe der systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung

Nach Kapitel 5.3.1 ist eine nichtlineare Parameterschätzung (wie z.B. eine Positionierungsaufgabe) bezüglich des Fortpflanzungsverhaltens über beobachtungsbezogene zufällige Varianzanteile hinaus i.A. stets mit zusätzlichen stochastischen Anteilen sowie nichtlinearen Effekten höherer Ordnungen behaftet.

Aufgrund dieser somit auch für den nicht überbestimmten Fall gültigen Eigenschaft kommt z.B.

- das einfache polare Anhängen
- der einseitig angeschlossene Polygonzug (als fortgesetztes polares Anhängen)

für eine nichtlineare Ortungsaufgabe zur Induktion von Verzerrungseffektenhöherer Ordnung und damit als Anwendung zur nichtlinearen Varianzenfortpflanzung in Frage.

5.7.1 Das einfache polare Anhängen

Für die zielführenden Betrachtungen sei als nicht überbestimmte und nichtlineare Ortungsaufgabe aufgrund des wenig aufwändigen algebraischen Umgangs mit dem zugehörigen Formelwerk zunächst das einfache polare Anhängen beispielhaft.

Mit einer Neupunktentfernung von 1000 m zum Instrumentenstandpunkt sowie einer einheitlichen Richtungsgenauigkeit von ± 5 mgon, einer Streckenmessgenauigkeit von ± 5 mm und unkorrelierten Beobachtungen ergibt sich

- ein Bias 2. Ordnung für den Rechtswert $b_{Y_N}(2) = 6.2\ \mu m$
- ein Bias 2. Ordnung für den Hochwert $b_{X_N}(2) = 0$
- eine Standardabweichung 2. Ordnung für den Rechtswert $\sigma_{Y_N}(2) = \pm 8.7\ \mu m$
- eine Standardabweichung 2. Ordnung für den Hochwert $\sigma_{X_N}(2) = \pm 0$

Sowohl der systematische (geometrische) als auch der stochastische Verzerrungseffekt spielt aufgrund seiner – trotz der zugrundeliegenden nicht optimalen Instrumentengenauigkeiten nur sehr geringen – Größenordnung im µ-Bereich für geodätische Belange keine Rolle, obwohl der konventionelle, sich auf die Varianzenfortpflanzung 1. Ordnung beziehende mittlere Punktfehler für die Konfigurationen dieses Beispiels bereits 111 mm beträgt.

Die zugehörigen einzelnen Ausführungen sind aus Anhang 5.12.1 ersichtlich.

5.7.2 Der einseitig angeschlossene Polygonzug

Es soll in diesem Abschnitt eine möglicherweise – zusätzlich zur À-priori-Genauigkeitssituation des Beobachtungsraumes – bestehende Abhängigkeit der Varianzanteile 2. Ordnung vom Umfang einer

(in diesem Falle wiederum nicht überbestimmten) geodätischen Ortungsaufgabe geprüft werden, welche sich zu diesem Zweck und in entsprechender Fortführung des einfachen polaren Anhängens als dessen wiederholte Aneinanderreihung zum einseitig angeschlossenen Polygonzug (beliebiger Länge) gemäß Abbildung (A.5.10.1) ergibt.

Obwohl alle Beobachtungen analog zum Beispiel des einfachen polaren Anhängens als stochastisch unkorreliert eingeführt werden und auch nicht infolge redundanter Punktbestimmungen – wie z.B. im Ringpolygon – algebraisch korreliert sind, erzeugt die funktionale Abhängigkeit der Koordinaten ab dem zweiten Neupunkt von mehr als einer Richtungsbeobachtung nach den Beziehungen (A.5.10.10a) und (A.5.10.10b) mehr als einen Eintrag ungleich Null in den zugehörigen Spalten der Designmatrix bzw. den Zeilen der Jacobi- und der Hesse-Matrix. Daraus folgen Korrelation und somit Kovarianzen innerhalb der parameterbezogenen Kovarianzmatrizen der 1. und 2. Ordnung.

Mit Seitenlängen von jeweils 1000 m und für die realistischen À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten

- Richtung zum Fernziel :$\sigma_{r_{FZ}} = 0.002$ gon
- Übrige Richtungen :$\sigma_r = 0.002$ gon
- Strecken :$\sigma_s = 0.002$ m

ergibt sich das Fehlerbudget mit den Anteilen 1. und 2. Ordnung sowie der stochastisch induzierte Parameterbias 2. Ordnung $b_x(2)$ nach (5.38) gemäß folgender Übersicht.

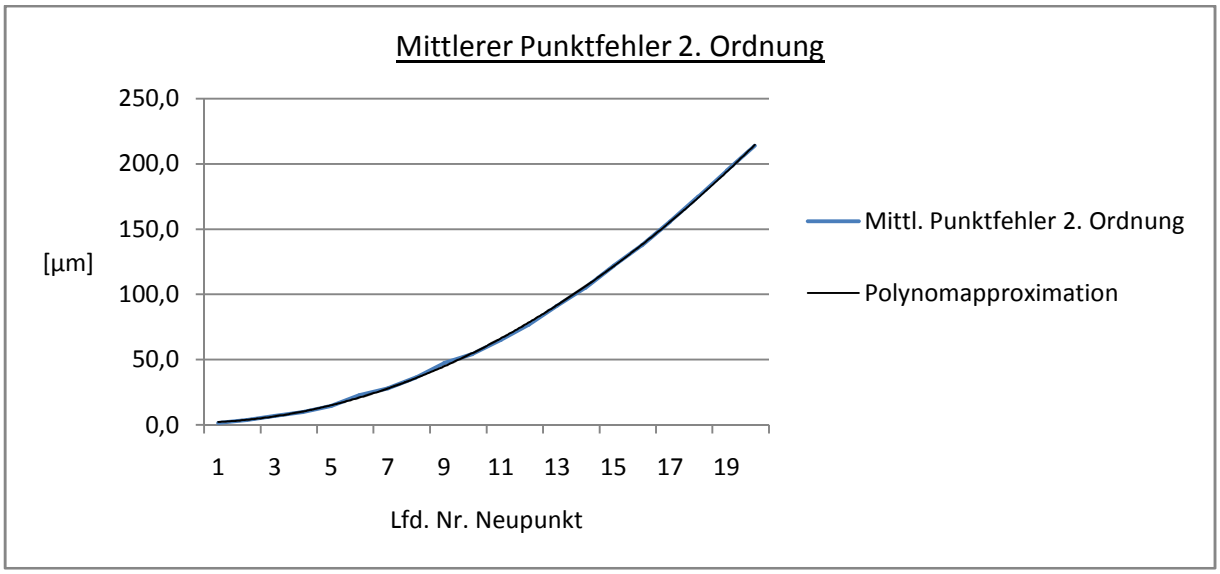
Die Anteile 2. Ordnung stimmen in der genäherten Einheitlichkeit der Ausrichtung $\Phi(2)$ der latenten neupunktbezogenen Hauptschwachformen bzw. des damit identischen (stochastisch induzierten) Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ mit dem Verhalten der Anteile 1. Ordnung einer einheitlichen Ausrichtung der natürlichen neupunktbezogenen Hauptschwachformen überein. Jene Homogenitäten finden in der regelmäßigen geometrischen Struktur der hier betrachteten Ortungsaufgabe ihre Ursache. Der Unterschied in dieser qualitativen Eigenschaftbesteht zwischen den Anteilen beider Ordnungen in der Ausrichtung jener Hauptschwachformen: $\Phi(1) = 0$ gon für die Anteile 1. Ordnung und konträr dazu $\Phi(2) = 300$ gon für die Anteile 2. Ordnung. Die natürliche Hauptschwachform folgt also der positiven Hochachse und die latente Hauptschwachform 2. Ordnung der negativen Rechtsachse, mit dem Resultat einer Ausrichtungsdifferenz von 100 gon und somit stets Orthogonalität zwischen der Wirkrichtung beider Anteilsarten, auch wenn die negative Komponente der jeweiligen Hauptschwachform betrachtet wird.
Erwartungsgemäß wächst die Größenordnung der Anteile 2. Ordnung eines Neupunktes tendenziell mit der Anzahl der an seiner Bestimmung beteiligten Beobachtungen gemäß Abbildung (5.4) und so auch mit seinem Abstand zum Festpunkt und erreicht für dieses Beispiel maximal 0.214 mm im Sinne eines mittleren Punktfehlers 2. Ordnung $M_P(2)$. Damit beschränkt sich der (eindimensionale) Anteil 2.

Ordnung für den stochastisch ungünstigsten Neupunkt dieses Beispiels auf weniger als 0.01 % des entsprechenden Anteils 1. Ordnung.

Tab. (5.7) Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung, stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einseitig angeschlossenen Polygonzug (À-priori-Genauigkeiten = ± 2 mgon und ± 2 mm):

Lfd. Nr. NP	Zufällige Fehler (1. Ordnung)		Quasi-systematische Fehler (2. Ordnung, gesamt)			Quasi-systematische Fehler (2. Ordnung, lat. Hauptschwachform)			
	$\sigma_{Y_N}(1)$	$\sigma_{X_N}(1)$	$\sigma_{Y_N}(2)$	$\sigma_{X_N}(2)$	$M_P(2)$	b_{Y_N}	b_{X_N}	b_N	$\Phi(2)$
	[mm]	[mm]	[µm]	[µm]	[µm]	[µm]	[µm]	[µm]	[gon]
1	2.0	44.4	1.4	0.0	1.4	-1.0	0.0	1.0	300.0
2	2.8	99.3	3.7	0.0	3.7	-3.1	0.0	3.1	300.0
3	3.5	166.2	7.0	0.0	7.0	-6.2	0.0	6.2	300.0
4	4.0	243.3	9.8	0.0	9.8	-8.7	0.0	8.7	300.0
5	4.5	329.5	14.5	0.0	14.5	-13.3	0.0	13.3	300.0
6	4.9	423.8	22.8	0.0	22.8	-21.6	0.0	21.6	300.0
7	5.3	525.7	28.1	0.0	28.1	-26.7	0.0	26.7	300.0
8	5.7	634.6	36.3	0.0	36.3	-34.9	0.0	34.9	300.0
9	6.0	750.0	47.4	0.0	47.4	-46.2	0.0	46.2	300.0
10	6.3	871.8	54.3	0.0	54.3	-52.8	0.0	52.8	300.0
11	6.6	999.4	65.0	0.0	65.0	-63.6	0.0	63.6	300.0
12	6.9	1132.7	76.7	0.0	76.7	-75.4	0.0	75.4	300.0
13	7.2	1271.5	91.3	0.0	91.3	-90.2	0.0	90.2	300.0
14	7.5	1415.5	105.0	0.0	105.0	-103.9	0.0	103.9	300.0
15	7.7	1564.5	122.0	0.0	122.0	-121.2	0.0	121.2	300.0
16	8.0	1718.4	137.6	0.0	137.6	-137.0	0.0	137.0	300.0
17	8.2	1877.1	155.7	5.7	155.8	-155.2	3.9	155.2	301.6
18	8.5	2040.3	174.8	5.3	174.9	-174.4	-1.9	174.4	299.3
19	8.7	2208.1	193.8	19.9	194.8	-193.6	-17.5	194.4	294.3
20	8.9	2380.2	213.9	0.0	213.9	-213.7	0.0	213.7	300.0

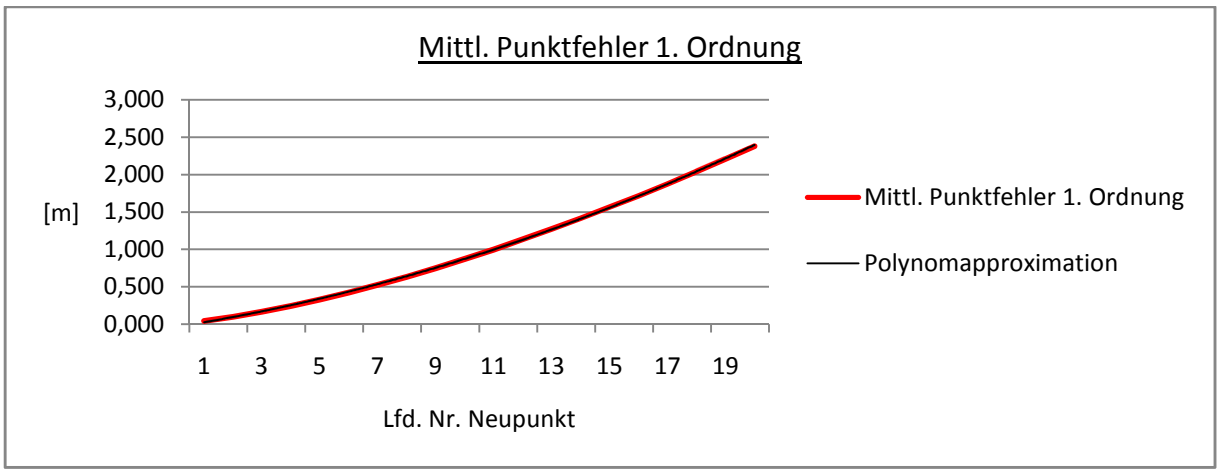
Abb. (5.4) Entwicklung des mittleren Punktfehlers 2. Ordnung $M_P(2)$
(einseitig angeschlossener Polygonzug):



Die Abhängigkeit des mittleren Punktfehlers 2. Ordnung $M_P(2)$ von der Anzahl der bis dahin angehängten Neupunkte und damit von der Anzahl der ihn induzierenden Beobachtungen lässt sich anhand eines Polynoms 2. Grades als geometrisches Standardformelement streng modellieren.

Begleitend sei dazu die Entwicklung des mittleren Punktfehlers 1. Ordnung $M_P(1)$ dargestellt, der sich für dieses Beispiel ebenfalls streng anhand eines Polynoms 2. Grades modellieren lässt.

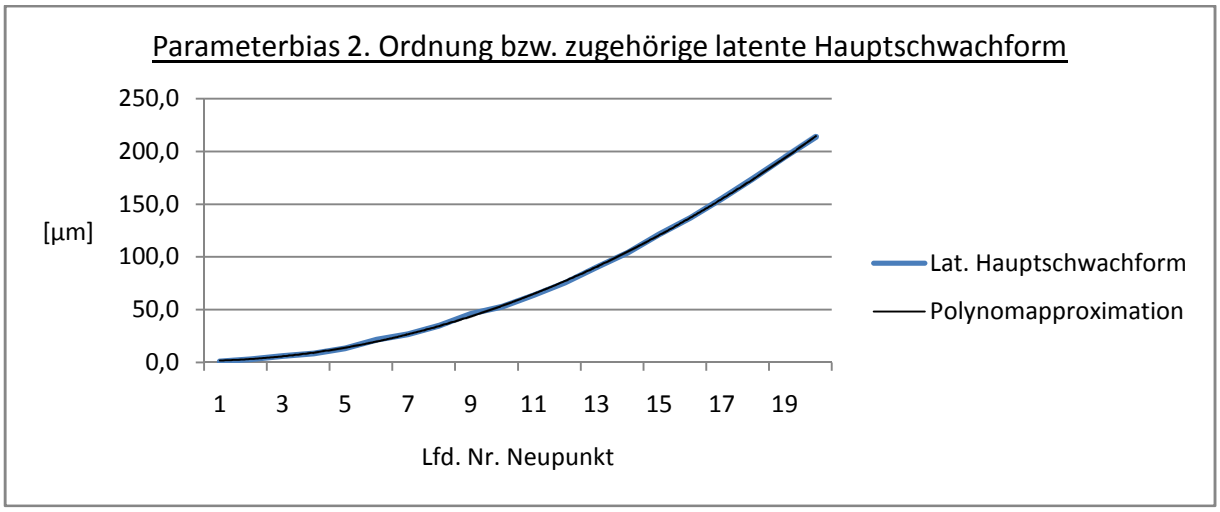
Abb. (5.5) Entwicklung des mittleren Punktfehlers 1. Ordnung $M_P(1)$
(einseitig angeschlossener Polygonzug):



Der stochastisch induzierte Parameterbias 2. Ordnung erreicht im vorliegenden Beispiel ein Maximum von 0.214 mm und ist so infolge seiner geringen Größe als ein geometrisch auf die Lösung einer nichtlinearen geodätischen Ortungsaufgabe mit realistischen À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten systematisch-deterministisch wirkender Verzerrungseffekt gleichsam bedeutungslos.

5.7 Größe der systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung

Abb. (5.6) Stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ bzw. latente Hauptschwachform (einseitig angeschlossener Polygonzug):



Der Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ weist durchschnittlich rund 95 % der Größe des mittleren Punktfehlers 2. Ordnung auf und ist mit diesem daher fast identisch; es gelingt die Modellierung von $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{2})$ somit ebenfalls anhand eines Polynoms 2. Grades.

5.7.3 Fazit und Folgerung

Das Beispiel eines einseitig angeschlossenen Polygonzuges zeigt die gleichermaßen für die Anteile 1. und 2. Ordnung bestehende tendenzielle Abhängigkeit von der sich auf den Abstand eines Neupunktes zum letzten Festpunkt hierfür reduzierenden Netzgeometrie, welche für die in diesem Sinne maximalabständigen Neupunkte entsprechend maximale Anteile für beide Ordnungen induziert. Aufgrund der in diesem Beispiel dafür gewählten Netzgeometrie weisen diese Anteile als mittlere Punktfehler trotz realistischer À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten bereits für den elften ab dem Festpunkt gezählten Neupunkt eine Größe von ± 1 m für die 1. Ordnung auf, welche die in Ingenieur- oder Landesnetzen übliche Punktgenauigkeit deutlich übertrifft; die damit einhergehenden Anteile 2. Ordnung erreichen mit rund 0.2 mm keine für geodätische Anwendungen zu berücksichtigende Größenordnung. Dies gilt ebenfalls für den zugehörigen Parameterbias 2. Ordnung als deterministisch-systematischer Effekt auf die Netzgeometrie mit gleicher maximaler Größe. Es ist ferner zu beachten, dass infolge der Art der hier vorgenommenen Betrachtungen die gefundenen Werte die Eigenschaft von Obergrenzen für die deterministisch-systematische bzw. die stochastische Wirkung der auf einer Nichtlinearitätsverzerrung beruhenden Anteile 2. Ordnung aufweisen und so die Wirkung jener Anteile auch für ausgedehntere Netzgeometrien vernachlässigbar bleibt.

Diese Überlegungen gelten auch für den Ausgleichungsfall, welcher grundsätzlich eine im Vergleich zur nicht überbestimmten (und nichtlinearen) Varianzenfortpflanzung größere Gesamtredundanz und so für ein mit der Varianzenfortpflanzung vergleichbares stochastisches Modell der Beobachtungen geringere parameterbezogene Varianzen aufweist.

Im betrachteten Beispiel des streng regelmäßigen einseitig angeschlossenen Polygonzugs lässt sich ferner eine einheitliche Ausrichtung außer für die natürliche Hauptschwachform auch für die latente Hauptschwachform 2. Ordnung nachweisen mit einer Orthogonalität beider Hauptschwachformen zueinander. Für diese geometrisch regelmäßige Ortungsaufgabe wachsen die Größen des auf die 2. Ordnung beschränkten mittleren Punktfehlers sowie des Parameterbias 2. Ordnung mit dem Abstand zum Fest- bzw. Ausgangspunkt entsprechend eines Polynoms 2. Grades.

MEKID & VAJA (2007) führen die Kategorien Kalibrierung und Messung als relevant für Wirkungen von Termen höherer Ordnung in ingenieurwissenschaftlich-technischen Anwendungen von ultra-hoher Genauigkeit auf.
Dazu zählt z.B. die Kalibrierung von Beschleunigungsmessern mittels Laser-Interferometer mit einer relativen Genauigkeit von besser als 0.1 % oder aus dem Bereich der Nanotechnologie die Prüfung von Schablonen der Halbleitertechnik mit einer Positionierungsgenauigkeit von 10 nm auf 10 mm.
Die in MEKID & VAJA (2007) gezeigte Versuchsanordnung stellt eine indirekte, auf einer Kapazitätsmessung in Farad beruhende Entfernungsmessung von etwa 12.3 µm dar, für die sich aus insgesamt 20 Messungen eine Genauigkeit von $1\sigma \approx \pm 0.5$ µm ergab. Im Vergleich zu den Richtungs- und Entfernungsmessgenauigkeiten des zuvor betrachteten einseitig angeschlossenen Polygonzuges (z.B. ± 2 mm für 1 km) liegen hier also relativ ungünstigere À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten vor. Es zeigt sich folgerichtig eine gegenüber den Bedingungen des Polygonzugs deutlich vergrößerte deterministisch-systematische Wirkung der Effekte 2. Ordnung von ca. 0.2 % der Größe des konventionellen, auf der 1. Ordnung beruhenden Mittelwertes (Polygonzug: ≈ 0 %) sowie die ebenfalls vergrößerte zugehörige stochastische Wirkung der Effekte 2. Ordnung von 0.5 % der konventionellen Stochastik (Polygonzug: < 0.01 %).
Für industrielle Anwendungen höchster Meß- oder Fertigungsgüte können Momente höherer Ordnung somit eine größere deterministische und stochastische Wirkung erzielen als in der Geodäsie.

5.8 Wahre Parameterstochastik und Restgliedschätzung der Anteile höherer Ordnung

Nachdem die Beziehungen zur Ermittlung der Nichtlinearitätsverzerrungen im 1. und 2. Moment von Parameterschätzungen nun bekannt sind und deren Größenordnungen geschätzt wurden, erhebt sich die Frage nach der Größe der Anteile höherer Ordnungen und damit nach einer Restgliedschätzung. In logischer Konsequenz schließt sich die Schätzung der wahren Parameterstochastik an.

Ein nichtlineares Modell $f(\boldsymbol{l})$ zur Abbildung der Beobachtungen in den Parameterraum lässt sich mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung bis einschließlich zweitem Reihenglied im Falle eines Polynoms 2. Ordnung als Abbildungsvorschrift $f(\boldsymbol{l})$ exakt darstellen. Mit dem Auftreten von Polynomen höherer als zweiter Ordnung oder anderen nichtlinearen und nicht exponentiellen Termen in $f(\boldsymbol{l})$ ergibt sich aus der Taylorreihenentwicklung bis einschließlich zweitem Reihenglied nur eine Näherungslösung.
Dies trifft beispielsweise für trigonometrische Winkelfunktionen als Terme von $f(\boldsymbol{l})$ zu, so dass für nahezu alle geodätischen Ortungsaufgaben und Messprozesse für das zugehörige Modell $f(\boldsymbol{l})$ noch verbesserte Näherungen durch die Verwendung von Reihengliedern ab der 3. Ordnung zu erzielen wären bzw. die Beschränkung auf Glieder bis zur 2. Ordnung einen weiteren Parameterbias $\boldsymbol{b_x}(\mathbf{3}+)$ sowie zugehörige weitere Vernachlässigungen in der Parameterstochastik $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{3}+)$ impliziert.

Die aus den Varianzanteilen 1. und 2. Ordnung resultierende Stochastik der Parameter stellt sich für normalverteilte Beobachtungen als Summe der Kovarianzmatrizen 1. Ordnung $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{1})$ und 2. Ordnung $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ dar. Es kann erwartet werden, dass sich die Fehleranteile jeder höheren Ordnung i ebenfalls einer zu ihrer Ordnung gehörigen Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{i})$ zuordnen lassen.

Das aus den Anteilen aller Ordnungen theoretisch resultierende Gesamtbudget $\boldsymbol{C_{xx}}$ folgt – als in Bezug auf die Fehlertheorie wahres Fehlerbudget der Parameter – aufgrund dieser Summenbildung daher formal dem Varianzenfortpflanzungsgesetz für unabhängige Ausgangsgrößen:

$$\boldsymbol{C_{xx}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{i})\right) \tag{5.32a}$$

In der Geodäsie sind jedoch häufig auch die eindimensionalen Genauigkeitsmaße von Interesse. So ergibt sich die Standardabweichung eines Parameters aus den Anteilen der ersten n Ordnungen zu:

$$\sigma(1+2+\cdots+n) = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{xx}(i)} \tag{5.32b}$$

Für die Belange einer Restwertschätzung ist grundlegend, dass sich – dem Gesetz der linearisierenden Taylorreihenentwicklung folgend – die aus der Matrixalgebra erhaltenen Varianzanteile mit steigender Ordnung betraglich verringern:

$$|c_{xx}(i+1)| < |c_{xx}(i)| \tag{5.33}$$

Diese Verringerung sei zur Erzielung einer Restgliedschätzung anhand einer geometrischen Folge mit dem Reduktionsfaktor als Verhältnis

$$q = \frac{|c_{xx}(i+1)|}{|c_{xx}(i)|} < 1 \tag{5.34}$$

zu einer Näherung modelliert, da sich das tatsächliche Größenverhältnis zweier Varianzanteile desselben Parameters aber benachbarter Ordnungen aufgrund der Komplexität des Bildungsgesetzes jener Varianzanteile und der beteiligten Ableitungen höheren Grades nicht grundlegend angeben lässt.
Die Summe der ersten n Glieder der zugehörigen geometrischen Reihe ergibt sich mit dem Startwert $c_{xx}(1)$ zu:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{xx}(i) = c_{xx}(1) * \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{5.35}$$

Das infolge einer Abweichung dieser Modellierung von den tatsächlichen Verhältnissen lediglich als *quasi-wahr* zu bezeichnendes Fehlerbudget ergibt sich unter Berücksichtigung aller theoretisch möglichen Glieder und mit Berücksichtigung von $q < 1$ aus der zugehörigen Grenzwertbildung zu:

$$c_{xx} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{xx}(i)\right) = c_{xx}(1) * \frac{1-q^{\infty}}{1-q}$$

$$c_{xx} = \frac{c_{xx}(1)}{1-q} \tag{5.36}$$

Durch Subtraktion des konventionellen Fehleranteils erhält man daraus für die Restgliedschätzung als Summe aller höherwertigen, also auf jenseits der 1. Ordnung bezogenen Fehleranteile $c_{xx}(2+)$:

$$c_{xx}(2+) = \frac{c_{xx}(1)}{1-q} - c_{xx}(1) = \frac{c_{xx}(1) - c_{xx}(1) * (1-q)}{1-q} = c_{xx}(1) * \frac{1-(1-q)}{1-q}$$

$$c_{xx}(2+) = c_{xx}(1) * \frac{q}{1-q} \tag{5.37}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar das Verhältnis des bisher nicht berücksichtigten zum konventionellen Fehlerbudget als

$$\frac{c_{xx}(2+)}{c_{xx}(1)} = \frac{c_{xx}(1) * \frac{q}{1-q}}{c_{xx}(1)}$$

$$\frac{c_{xx}(2+)}{c_{xx}(1)} = \frac{q}{1-q} \tag{5.38}$$

das zur Kategorisierung der bislang unberücksichtigten Anteile eine aussagekräftige Größe liefert.

Auf die als eindimensionale Genauigkeitsmaße oft interessierenden Standardabweichungen bezogen lauten

- das quasi-wahre Fehlerbudget:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{c_{xx}(1)}{1-q}}$$

$$\sigma = \pm\frac{\sigma(1)}{\sqrt{1-q}} \tag{5.39a}$$

- das quasi-wahre Fehlerbudget, bezogen auf die konventionelle Standardabweichung $\sigma(1)$ und prozentual:

$$\frac{100}{\sqrt{1-q}} \tag{5.39b}$$

- die Restwertschätzung als Summe aller höherwertigen Fehleranteile – also ab 2. Ordnung:

$$\sigma(2+) = \pm\sqrt{c_{xx}(1) * \frac{q}{1-q}}$$

$$\sigma(2+) = \sigma(1) * \sqrt{\frac{q}{1-q}} \tag{5.40a}$$

- die Restwertschätzung als Summe aller höherwertigen Fehleranteile, bezogen auf die konventionelle Standardabweichung $\sigma(1)$ und prozentual:

$$100 * \sqrt{\frac{q}{1-q}} \tag{5.40b}$$

Aus Überlegungen zur relativen Quantifizierung der stochastischen Effektbelastungen entstammt die Methode für die Quantifizierung der ausschließlich varianzenbezogenen Effektbelastung, welche die durchschnittliche Effektbelastung der konventionellen Stochastik einer Neupunktkoordinate auch in

ihrer quadratischen Form als arithmetischen Mittelwert aller einzelkoordinatenbezogenen Verhältnisse zwischen jeweils ausschließlich effektinduzierter zu konventioneller Varianz liefert.
Mit den Varianzanteilen 2. Ordnung als konkrete Effektbelastung bildet diese quadratische Form den hier definierten Reduktionsfaktor q gemäß (5.34) als das Verhältnis eines einzelkoordinatenbezogenen Varianzanteils 2. Ordnung (Effektbelastung) zum Anteil 1. Ordnung (konventionelles Fehlerbudget), der diese Verhältnisbildung für beliebige aufeinanderfolgende Ordnungen modelliert und eine Steuergröße zur Ermittlung des resultierenden quasi-wahren bzw. des Restfehlerbudgets nach (5.39a) und (5.39b) bzw. (5.40a) und (5.40b) darstellt.

In dem Beispiel des Kapitels 5.7.1 (einfaches polares Anhängen) ergibt sich z.B. für die Stochastik des Rechtswertes des Neupunktes der Reduktionsfaktor zu $q = \frac{|c_{xx}(2)|}{|c_{xx}(1)|} = \frac{0.011^2}{5.0^2} = 0.00000484$ und so das modellierte fehlertheoretisch quasi-wahre Budget dieses Parameters in seiner eindimensionalen Form zu 100.000242 % der konventionellen Standardabweichung. Die Summe aller Anteile höherer Ordnung beträgt für sich betrachtet nach (5.40b) 0.22 % der konventionellen Standardabweichung.
Aufgrund des Fortpflanzungsverhaltens der Varianzanteile verschiedener Ordnungen entsprechend der Gauß'schen Varianzenfortpflanzung für unabhängige Ausgangsgrößen übertrifft die auf die konventionelle Standardabweichung bezogene prozentuale Größe einer nur für sich betrachteten stochastischen Effektbelastung – wie z.B. der Anteil 2. Ordnung – (hier: 0.22 %) stets die prozentuale Vergrößerung desselben Bezugs, die sich aus der gemeinschaftlichen stochastischen Wirkung von Effektbelastung und konventionellem Anteil (hier: 0.000242 %) ergibt.

5.9 Fazit zur nichtlinearen Varianzenfortpflanzung

Geodätische Ortungsaufgaben oder Parameterschätzungen mit nichtlinearen Parametrisierungen der Beobachtungen induzieren linearisierungsbedingt systematisch und stochastisch wirkende Anteile höherer Ordnung für den nicht überbestimmten Fall.
In der Geodäsie treten diese Anteile daher ab der 2. Ordnung auf. Die systematische Wirkung realisiert sich als ein unmittelbar die geometrische Lösung belastender Parameterbias 2. Ordnung, während die stochastische Wirkung einen Zuschlag $\boldsymbol{C_{xx}(2)}$ für die konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}(1)}$ induziert. Sowohl diese geometrische als auch diese stochastische Nichtlinearitätsverzerrung wird durch sich verbessernde À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten herabgesetzt und wird nur jeweils nullgleich, wenn varianzfreie Beobachtungen vorliegen. In den übrigen Fällen lassen sich beide Werte aus einer iterativ angewendeten Matrixalgebra heraus mit erzeugen und konvergieren dabei gegen eine Lösung ungleich Null, wenn die Matrixalgebra selber konvergierende Lösungen liefert.

TEUNISSEN (1989) zeigt Ansätze zur skalaren und vektoriellen Bemaßung dieser Nichtlinearität mit der Angabe von Ober- und Untergrenzen auf und beschränkt sich dabei auf den nicht überbestimmten Fall und normalverteilte Beobachtungen. Es wird zwischen den sich aus dem stochastischen Modell der Beobachtungen speisenden und daher stochastisch induzierten Nichtlinearitätsverzerrungen einer erwartungstreuen, also unverzerrten (unbiased) Schätzung und den sich aus nicht zufälligen Fehleranteilen speisenden und daher deterministisch-systematisch induzierten Nichtlinearitätsverzerrungen unterschieden. Für die stochastisch induzierte Nichtlinearitätsverzerrung des Beobachtungsraums $\boldsymbol{b_l(2)}$ (Beobachtungsbias) und die zugehörige Verzerrung des Parameterraums $\boldsymbol{b_x(2)}$ (Parameterbias) existiert in L2-Norm-Schätzungen ein relationaler Zusammenhang mit linearer Transformation gemäß Beziehungen (A.5.5.14a) und (A.5.5.14b). Der deterministisch-systematisch induzierte Parameterbias 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x(2)}$ ergibt sich hingegen aus einer linearen Transformation der quadratischen Form des deterministisch-systematischen Beobachtungsbias $\boldsymbol{b_l}$ in den Parameterraum gemäß (A.5.5.5c).

Die Quelle GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) gibt die stochastisch induzierte geometrische und die zugehörige stochastische Nichtlinearitätsverzerrung sowohl für Beobachtungen einer beliebig symmetrischen Dichtefunktion mit beliebigem Approximationsvektor als auch spezialisiert auf normalverteile Beobachtungen eines mittelwertigen Approximationsvektors an. Die jeweils angegebene stochastische Nichtlinearitätsverzerrung ist jedoch nicht korrekt und wird hier falsifiziert.

Es war – analog zur Verzerrung geodätischer Netze infolge von beispielweise Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen – zu erwarten, dass sich die Nichtlinearitätsverzerrungen nicht nur mit den À-priori-Genauigkeiten der Netzbeobachtungen sondern auch mit der Größe des Netzes erhöhen, da sich mit der Netzgröße auch die für die Varianzanteile 2. Ordnung nach Beziehung (5.22) größenwirksame Dimension der Hesse-Matrix exponentiell vergrößert. Am Beispiel der nichtlinearen Varianzenfortpflanzung im einseitig angeschlossenen Polygonzug konnte zwar eine positive

Korrelation zwischen der Netzgröße bzw. dem Neupunktabstand zum nächsten Anschlusspunkt und seinen Nichtlinearitätsverzerrungen wie den Varianzanteilen 2. Ordnung grundsätzlich nachgewiesen werden, jedoch beschränkt sich sowohl die deterministisch-systematische als auch die stochastische Nichtlinearitätsverzerrung auf den Sub-Millimeterbereich für 20 im Abstand von jeweils 1000 m aufeinanderfolgende Neupunkte in diesem Polygonzug.

Somit ist zu erwarten, dass diese Wirkungen der Anteile 2. Ordnung für realistische Beobachtungsgenauigkeiten in Lagenetzen der Ingenieur- und der Landesvermessung lediglich geometrische und stochastische Netzverzerrungen unterhalb der Relevanzgrenze geodätischer Belange zu erzeugen vermögen. Für die Belange ingenieurwissenschaftlich-technischer Anwendungen wie hochgenauer Beschleunigungsmesser oder der Nanotechnologie können jedoch die deterministisch-systematischen Wirkungen von Termen höherer Ordnung etwa 0.2 % des konventionellen Erwartungswertes und die zugehörigen stochastischen Wirkungen etwa 0.5 % der konventionellen Stochastik betragen und somit nach MEKID & VAJA (2007) die Wahrnehmungs- und Relevanzgrenze überschreiten.

Im Anschluss an die Ermittlung der Varianzanteile 2. Ordnung erhebt sich die Frage nach einer Restgliedschätzung der Anteile höherer Ordnung, welche aufgrund der Komplexität des Bildungsgesetzes jener Varianzanteile und der beteiligten Ableitungen höheren Grades sich nicht grundlegend angeben lässt und daher in einer Näherung auf der Grundlage eines angenommenen konstanten Verhältnisses zweier Varianzanteile desselben Parameters aber benachbarter Ordnungen modelliert wird.
Diese Restgliedschätzung führt somit auf die quasi-wahre Stochastik der Parameter und beschränkt sich im Beispiel des polaren Anhängens aus Kapitel 5.7.1 für den Rechtswert des Neupunktes als modellierte Summe aller Anteile ab 2. Ordnung auf 0.22 % der konventionellen Standardabweichung.

Die Anteile 2. und höherer Ordnung sind grundsätzlich linearisierungsbedingt und können damit als *quasi-systematisch* bezeichnet werden. Der resultierende Kovarianzmatrixzuschlag für die 2. Ordnung $\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2})$ weist als Summe zweier dyadischer Produkte nach z.B. Beziehung (5.25b) den Rang 2 und so nicht die klassischen Eigenschaften einer statistisch begründeten Kovarianzmatrix auf.

Im Gegensatz dazu sind die nicht-zufälligen Fehleranteile im geometrischen Nivellement als entweder stochastisch-systematische (FAWAZ 1981) oder deterministisch-systematische Anteile (JÄGER 1990) physikalisch induziert; deren beobachtungsbezogener Kovarianzmatrixzuschlag stellt ebenfalls keine statistisch begründete Kovarianzmatrix dar und ist zur Erzeugung des zugehörigen Kovarianzmatrixzuschlags der Parameter noch in den Parameterraum abzubilden.

6 Analyse der zufälligen und systematischen Fehleranteile in Lagenetzen

Vorbemerkung:

Zur Darstellung von Skalaren, Vektoren und Matrizen in diesem Kapitel siehe Vorbemerkung zu Kapitel 2.

6.1 Zielsetzung der stochastischen Analyse von Lagenetzen

Ebenso wie für die Nivellementnetze sind die deterministischen Effekte für geodätische Lagenetze weitgehend ausgeforscht; deren stochastisches Verhalten in Bezug auf bisher vernachlässigte stochastisch-systematische Fehleranteile in den Beobachtungen oder im stochastischen Modell der stochastischen Anschlusspunkte einer dynamischen Ausgleichung (s. Kapitel 6.5.2) stellt hingegen noch ein Forschungsgebiet dar.
Dies gilt ebenfalls für die quasi-systematischen Varianzanteile, die sich im Rahmen der Linearisierung nichtlinearer Modelle geodätischer Ortungsaufgaben aus der Beschränkung auf die Glieder 1. Ordnung ergeben und geometrisch und stochastisch verzerrend wirken.

Bis hierher konnte bereits gezeigt werden, dass die Größen der geometrischen und der stochastischen Nichtlinearitätsverzerrungen für geodätische Belange bedeutungslos sind, falls die Netz- oder Sensorbeobachtungen den üblichen hohen geodätischen Genauigkeiten genügen (Kapitel 5.7). Ferner sollen nun also alle anderen möglichen Verzerrungseinflüsse auf geodätische Lagenetze – insbesondere die Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen und der stochastischen Anschlusspunkte als jeweils stochastisch-systematische Fehleranteile – untersucht werden.

Beide Fehlerarten – quasi-systematische und stochastisch-systematische – induzieren zusätzliche Varianz- und Kovarianzanteile in der Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}}$, deren Modellierung die Schätzung der quasi-wahren Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{xx}}$ erlaubt.

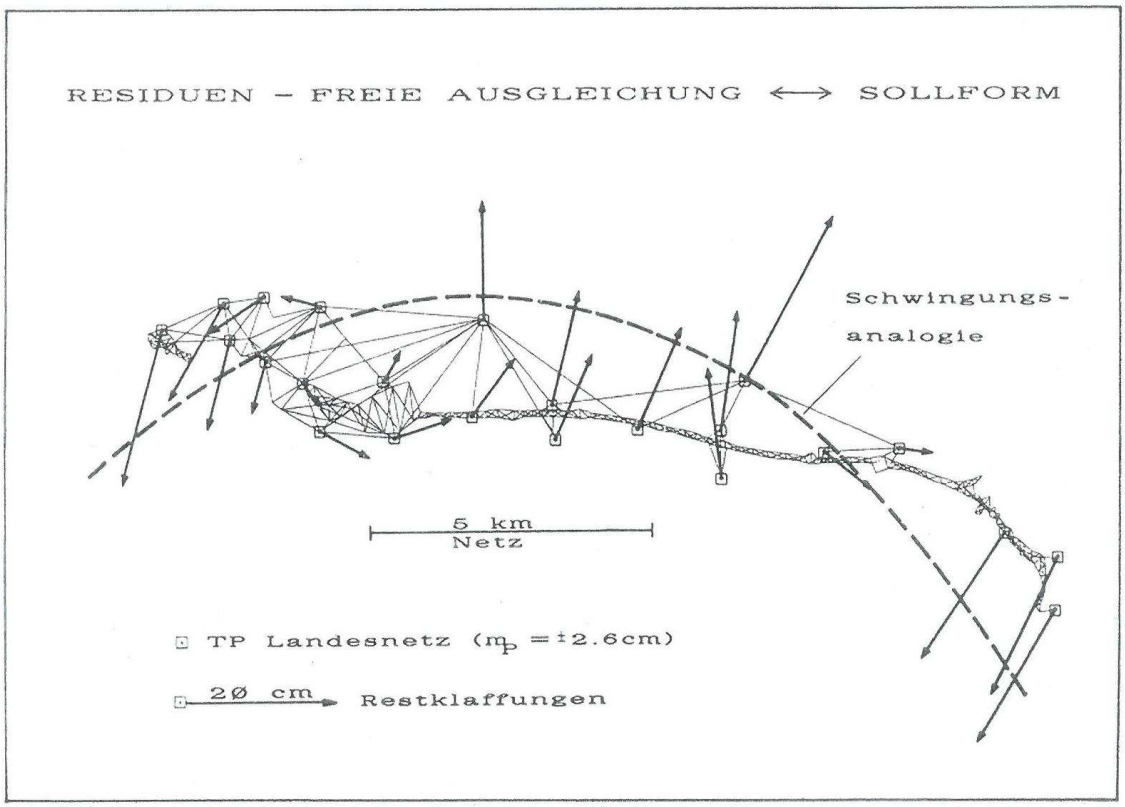
Auf der Grundlage eines quasi-wahren Fehlerbudgets der geschätzten Parameter – insbesondere der gesuchten Netzkoordinaten $\boldsymbol{x}$ – können stochastisch gestützte Erklärungsansätze für die im Rahmen der weltweit stattfindenden Überführung klassischer Landesnetze in den ITRF-Bezug als geometrische Verzerrungseffekte auftretenden langwelligen Schwachformen aufgestellt werden.

Weitere Beispiele für langwellige Schwachformen in Lagenetzen sind im Anhang 6.1 aufgeführt.

Analog zur Analyse der zufälligen und systematischen Fehleranteile im geometrischen Nivellement wird hier ein Konzept zur quantitativen und qualitativen Analyse der bisher vernachlässigten stochastisch- und quasi-systematischen Fehleranteile gesucht. Darin seien diese systematischen Fehleranteile sowohl in ihrer absoluten Größenordnung als auch relativ zu den rein zufälligen Anteilen betrachtet.

Es ist zu prüfen, ob sich daraus Strategien zur Vermeidung oder Herabsetzung dieser systematischen Fehleranteile entwickeln lassen.

Abb. (6.1) Langwellige Schwachform im DB-Netz *Pulverdingen* bis 0.3 m aus JÄGER (1988):



6.2 Ursachen nicht-zufälliger Fehleranteile in Lagenetzen

Im Gegensatz zum geometrischen Nivellement sind die nicht-zufälligen Fehleranteile in Lagenetzen nur teilweise physikalischer Ursache; es fehlt daher deren kompakte parametrisierte Modellierbarkeit.

Zu den wichtigsten nicht-zufälligen Fehleranteilen zählen in Lagenetzen deterministisch-systematische und stochastisch-systematischen Fehleranteile, welche jeweils anschlusspunkt- und beobachtungsbezogen auftreten können, wie nachfolgend dargestellt und in Tab. (6.1) aus Kapitel 6.5 illustriert. Ferner kommen linearisierungsbedingte quasi-systematische Fehleranteile, Netzdesigns, Spannungen zwischen Beobachtungen und Anschlusspunktkoordinaten sowie Realmessdatenverwendung anstelle einer Netzprognose als Ursache für geometrische und stochastische Netzverzerrungen in Frage.

Die anschlusspunktbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile ∇x in Lagenetzen sind

- falsche Koordinaten eines festen Anschlusspunktes
- falsche Koordinaten einer Satelliten-Orbitposition

Die Modellierung von anschlusspunktbezogenen Fehleranteilen ∇x ist in Kapitel 2.2.3 (*Stochastische Modellierung nicht-zufälliger Fehlertypen*) gezeigt.

Die beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile ∇l in Lagenetzen betreffen neben der Richtungsmessung hauptsächlich die elektrooptische Distanzmessung (EDM) und sind so vom verwendeten Gerät induziert:

- falsche Richtungssatzorientierung
- konstanter Restfehler a für die Additionskonstante des verwendeten EDM-Moduls
- konstanter Fehler in der Grundfrequenz des verwendeten EDM-Moduls (EDM-Maßstabsfaktor)

Die Modellierung von beobachtungsbezogenen Fehleranteilen ∇l ist grundlegend in Kapitel 2.2.3 und speziell für die beiden o.a. EDM-bezogenen Anteile in Kapitel 6.3.2 (*Beobachtungsbezogene deterministisch-systematische Fehleranteile (∇l) in Lagenetzen*) gezeigt.

Im Gegensatz zur Modellierung beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehler ∇l ist deren Aufdeckung z.B. anhand des Data-Snoopings nach BAARDA (1968) oder über die Balancierung einer L2-Norm-Ausgleichung nach KRUCK (1995) nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Die anschlusspunktbezogenen stochastisch-systematischen Fehleranteile δ in Lagenetzen umfassen

- das vollständige stochastische Modell der stochastischen Anschlusspunkte einer dynamischen Ausgleichung

Die Berücksichtigung dieses Modells in Schätzungen nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate ist in JÄGER et al. (2005) gezeigt.

Die beobachtungsbezogenen stochastisch-systematischen Fehleranteile δ in Lagenetzen betreffen

- die maßstabswirksame Beschickung der EDM-Rohstrecke mittels meteorologischer Daten
- den Zentrierfehler des verwendeten Tachymeters mit beliebiger Ausrichtung
- den Zentrierfehler des verwendeten GNSS-Basis-Rovers mit beliebiger Ausrichtung

Die Modellierung dieser drei beobachtungsbezogenen stochastisch-systematischen Fehleranteile δ ist in Kapitel 6.3.3 (*Beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile (δ) in Lagenetzen*) gezeigt.

Die quasi-systematischen Fehleranteile in Lagenetzen werden induziert durch

- die auf der Linearisierung nichtlinearer Modelle beruhende Vernachlässigung mit dem Abbruch der linearisierenden Reihenentwicklung nach dem üblicherweise erstem Reihenglied

Die Modellierung dieser quasi-systematischen Fehler- bzw. Varianzanteile ist in Kapitel 5.5 (*Wirkung der Varianzanteile 2. Ordnung*) gezeigt.

Es soll ferner untersucht werden, welche Wirkungen analog zum geometrischen Nivellement folgende Aspekte auf nicht-zufällige Fehleranteile in Lagenetzen ausüben:

- Netzdesign 0. und 1. Ordnung
- Geometrische Zwänge als Spannungen zwischen Beobachtungen und Anschlusspunkt-koordinaten
- Verwendung von Realmessdaten einer konkreten Stichprobe anstelle einer Netzprognose

6.3 Modellierung beobachtungsbezogener systematischer Fehleranteile in Lagenetzen

6.3.1 Korrelationsverhalten geodätischer Beobachtungen

Geodätische Beobachtungen wie beispielsweise Richtungen, Strecken oder GNSS-Basislinien sind korreliert, wenn sie dem Einfluss derselben sogenannten Primär- oder Elementarfehlern unterliegen, unabhängig davon, ob diese Primärfehler selber korreliert sind und ob es sich dabei um deterministisch- oder stochastisch-systematische Fehler handelt (JÄGER et al. 2005). Im Falle von EDM-Strecken kommt unter anderem ein Maßstabsfehler des verwendeten EDM-Moduls und im Falle von GNSS-Basislinien unter anderem ein fehlerhaftes meteorologisches Korrekturmodell als Primärfehler in Frage.

6.3.2 Beobachtungsbezogene deterministisch-systematische Fehleranteile (∇l) in Lagenetzen

Die in Lagenetzen auftretenden beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile beschränken sich üblicherweise auf

- eine falsche Richtungssatzorientierung
- einen konstanten Restfehler a für die Additionskonstante des verwendeten EDM-Moduls
- einen konstanten Fehler in der Grundfrequenz des verwendeten EDM-Moduls (EDM-Maßstabsfaktor)

6.3.2.1 Konstanter Fehler in der Nullpunktfestlegung des EDM-Moduls

Ein Fehler in der Festlegung des Nullpunktes der Streckenmessung wirkt unmittelbar als konstanter Fehler a auf alle Strecken, die mit dem betroffenen EDM-Modul gemessen wurden.

Mit

$\boldsymbol{\nabla_a}$ = Beobachtungsbezogener Vektor mit dem Fehler a als Eintrag für jede betroffene Strecke

modelliert sich die zugehörige Zuschlagsmatrix $\boldsymbol{C_{\nabla_a}}$ für die konventionelle, auf die rein zufälligen Fehleranteile beschränkte Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{C_\varepsilon}$ zu

$$\boldsymbol{C_{\nabla_a}} = \boldsymbol{\nabla_a} * \boldsymbol{\nabla_a}^T \tag{6.1}$$

Die Wirkung des Nullpunktfehlers ist mit Hilfe der Einführung einer für die betroffenen Streckenbeobachtungen zu schätzenden Additionskonstante als zusätzlicher Parameter im funktionalen Modell rechnerisch eliminierbar.

6.3.2.2 Konstanter Fehler in der Grundfrequenz des EDM-Moduls

Der zweite geräteseitige Fehleranteil – eine nicht fehlerfrei abgestimmte Grundfrequenz – wirkt sich maßstäblich auf die mit dem betroffenen EDM-Modul gemessenen Strecken aus.

Mit

f = Maßstabsfehler der betroffenen Strecken [ppm]
s = Betroffene Strecke

ergeben sich die individuellen Streckenfehler zu

$$f_s = 10^{-6} * f * s \tag{6.2}$$

Mit

$\boldsymbol{\nabla_f}$ = Beobachtungsbezogener Vektor mit Individualfehlern f_s als Einträge für betroffene Strecken

modelliert sich die zugehörige Zuschlagsmatrix $\boldsymbol{C_{\nabla_f}}$ zu

$$\boldsymbol{C_{\nabla_f}} = \boldsymbol{\nabla_f} * \boldsymbol{\nabla_f}^T \tag{6.3}$$

Die Wirkung des frequenzbedingten EDM-Maßstabsfehlers ist mit Hilfe der Einführung eines für die betroffenen Streckenbeobachtungen zu schätzenden Maßstabsparameters als zusätzlicher Parameter im funktionalen Modell rechnerisch eliminierbar.

6.3.2.3 Summenwirkung der streckenbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile

Die Summe der streckenbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile als Kovarianzmatrix-zuschlag für $\boldsymbol{C_\varepsilon}$ ergibt sich zu

$$\boldsymbol{C_\nabla} = \boldsymbol{C_{\nabla_a}} + \boldsymbol{C_{\nabla_f}} \tag{6.4}$$

6.3.3 Beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile (δ) in Lagenetzen

In Lagenetzen sind folgende beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile typisch:

- Maßstabswirksame Beschickung der EDM-Rohstrecke mittels meteorologischer Daten
- Zentrierfehler des verwendeten Tachymeters mit beliebiger Ausrichtung
- Zentrierfehler des verwendeten GNSS-Basis-Rovers mit beliebiger Ausrichtung

Für nivellitische Höhennetze modelliert FAWAZ (1981) die auf die örtliche und zeitliche Veränderlichkeit des vertikalen Temperaturgradienten (CASOTT 1999) beruhenden vertikalen Refraktionsanteile als hauptsächliche stochastisch-systematische Fehler, über welche die Beobachtungen im geometrischen

Nivellement korreliert sind. Ein entsprechender Ansatz ist für den Beobachtungsraum von klassischen Lagenetzen weniger geeignet, da die hierin zwar ebenfalls wirkenden vertikalen Refraktionsanteile keine spürbare Belastung auf die Beobachtungen ausüben und potenziell für die Beobachtungen kritische und auf sie korrelierend wirkende horizontale Refraktionsanteile kaum auftreten.

6.3.3.1 Meteorologisch induzierter EDM-Maßstabsfehler

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der in EDM-Modulen verwendeten Trägerwelle ist vorrangig von der Temperatur und dem Druck der von ihr bei der Messung durchlaufenen Luftschichten abhängig. Insofern wirken Abweichungen zwischen angenommenem und realem Wert für beide Parameter maßstäblich auf die beobachteten Strecken. Nach KAHMEN (1986) ergibt sich unter den Bedingungen der Normalatmosphäre – und für die Belange dieser Betrachtungen ausreichend genau auch sonst – mit

ΔT = Abweichung zwischen angenommener und realer Lufttemperatur [K]

der

$m(\Delta T)$ = Lufttemperatur induzierte Maßstabsfehler der betroffenen Strecken [ppm]

zu

$$m(\Delta T) = 1.00 * \Delta T \tag{6.5}$$

und damit sein konkreter, auf die Einzelstrecke i individualisierter Wert zu

$$m_T(i) = 10^{-6} * m(\Delta T) * s \tag{6.6}$$

Jener stochastisch-systematische Fehleranteil erhält seine besondere Bedeutung infolge der Tatsache, dass der am EDM-Standort erhobene Wert für die Lufttemperatur kaum repräsentativ sein kann. Für eine korrekte temperaturabhängige Beschickung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwelle ist stets der sogenannte *integrale* Temperaturwert als wirksamer Mittelwert der im Allgemeinen nicht bekannten Temperaturen aller vom Meßstrahl durchlaufenden Luftschichten erforderlich. Ferner muss deren Streuung um mehrere Grade – je nach Geländebeschaffenheit, örtlichen thermischen Wirkungen und damit Veränderlichkeit des vertikalen Temperaturgradienten – unterstellt werden.

Weiterhin ergibt sich nach KAHMEN (1986) mit

ΔP = Abweichung zwischen angenommenem und realem Luftdruck [hPa]

der

$m(\Delta P)$ = Luftdruck induzierte Maßstabsfehler der betroffenen Strecken [ppm]

zu

$$m(\Delta P) = 0.28 * \Delta P \tag{6.7}$$

und damit sein konkreter, auf die Einzelstrecke i individualisierter Wert zu

$$m_P(i) = 10^{-6} * m(\Delta P) * s \tag{6.8}$$

Somit ergibt sich der $\boldsymbol{C_\varepsilon}$-Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{\delta_M}}$ der meteorologisch induzierten stochastisch-systematischen Fehleranteile für die Hauptdiagonalenelemente der Submatrix der Strecken zu

$$\boldsymbol{C_{\delta_M}}(i,i) = m_T(i)^2 + m_P(i)^2 \tag{6.9}$$

und für die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen dieser Submatrix zu

$$\boldsymbol{C_{\delta_M}}(i,j) = \sqrt{m_T(i)^2 + m_P(i)^2} * \sqrt{m_T(j)^2 + m_P(j)^2} \tag{6.10}$$

Auf der rechten Seite von Beziehung (6.10) ist der Korrelationsfaktor mit einem Wert von 1.0 eingeführt worden, da für die mit demselben EDM-Modul und unter denselben Bedingungen gemessenen Strecken i und j dasselbe Maß an Betroffenheit von Lufttemperatur- und Luftdruckfehler unterstellt wird.

Die Wirkung des meteorologisch induzierten EDM-Maßstabsfehlers ist mit Hilfe der Einführung eines für die betroffenen Streckenbeobachtungen zu schätzenden Maßstabsparameters als zusätzliche Unbekannte im funktionalen Modell rechnerisch eliminierbar.

6.3.3.2 Tachymeterseitiger Zentrierfehler

Der

ZT = Zentrierfehler des verwendeten Tachymeters

wirkt stochastisch-systematisch auf beobachtete Richtungen und Strecken und nimmt für justierte optische Lote eine Größenordnung von 0.5 bis 1 mm an; für optische Lote ohne aktuellen Justierzustand ist ein Zentrierfehler von 2 mm realistisch.

Dabei werden die beobachteten Richtungen im Sinne eines Standpunktexzentrums verfälscht und zwar um die Größe des Winkels α, der sich daraus im Zielpunkt ergibt und dessen Schenkel durch Zentrum und Exzentrum des Standpunktes verlaufen. Mit

s_i = Entfernung zwischen Standpunkt und Zielpunkt i

ergibt sich dieser Winkel für die Richtung i anhand der Bogenformel zu

$$\alpha(i) = \rho * \frac{ZT}{s_i} \tag{6.11}$$

und stellt so unmittelbar die Wirkung des Fehlers ZT auf die beobachteten Richtungen dar.

Diese Werte bilden in ihrer quadratischen Form die Hauptdiagonalenelemente in der Submatrix der Richtungen in dem $\boldsymbol{C_\varepsilon}$-Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}$ der durch die Tachymeterzentrierung bedingten stochastisch-systematischen Fehleranteile:

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,i) = \alpha(i)^2 \tag{6.12a}$$

Tritt ein entsprechender Zentrierfehler in derselben Größenordnung auch noch am Zielpunkt auf, so gilt für diese Hauptdiagonalenelemente alternativ zu Gleichung (6.12a):

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,i) = 2 * \alpha(i)^2 \tag{6.12b}$$

Für die Ermittlung der Kovarianzen ist zu berücksichtigen, dass Richtungen gleicher Richtungswinkel $t$in derselben Weise, gegensätzlich orientierte Richtungen in gegensätzlicher Weise und orthogonale Richtungen unabhängig voneinander beeinflusst werden. Der zugehörige Korrelationskoeffizient folgt daher der Kosinusfunktion des Winkelabstands der Richtungen i und j. So gilt für die Kovarianzen:

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,j) = \alpha(i) * \alpha(j) * cos(t_i - t_j) \tag{6.13}$$

Ein möglicher Zentrierfehler am Zielpunkt ist für die vorstehenden Kovarianzen irrelevant, weil die Richtungsbeobachtungen des betrachteten Standpunktes nur über einen standpunktseitigen und nicht über etwaige zielpunktseitige Zentrierfehler korreliert sind.

Der tachymeterseitige Zentrierfehler wirkt sich auf die beobachteten Strecken unmittelbar aus und so ergibt sich – induziert durch den stochastisch-systematischen Fehleranteil der Tachymeterzentrierung – die Hauptdiagonale der Submatrix der Strecken im $\boldsymbol{C_\varepsilon}$-Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}$ zu:

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,i) = ZT^2 \tag{6.14a}$$

Tritt ein entsprechender Zentrierfehler in derselben Größenordnung auch noch am Zielpunkt auf, so gilt für diese Hauptdiagonalenelemente alternativ zu Gleichung (6.14a):

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,i) = 2 * ZT^2 \tag{6.14b}$$

Für die Ermittlung der Kovarianzen der Strecken gilt das Korrelationsverhalten der Richtungen, so dass sich für die Elemente derselben Submatrix außerhalb der Hauptdiagonalen ergibt:

$$\boldsymbol{C_{\delta_{ZT}}}(i,j) = ZT^2 * cos(t_i - t_j) \tag{6.15}$$

Hinsichtlich eines möglichen Zentrierfehlers am Zielpunkt gelten analog die Ausführungen zu den Kovarianzen der Richtungsbeobachtungen.

Zur Ermittlung der Kovarianzen aus Richtungen und Strecken ist zu beachten, dass eine beobachtete Richtung mit einer beobachteten Strecke gleichen oder gegensätzlichen Richtungswinkels nicht über einen Zentrierfehler des Standpunktes (beliebiger Ausrichtung) korreliert ist. Der maximale Grad an Korrelation beider Meßelemente tritt hingegen im Orthogonalitätsfalle auf. Der zugehörige Korrelationskoeffizient folgt daher der Sinusfunktion des Winkelabstands von Richtung i und Strecke j.
So gilt für die Kovarianzen der Richtungen i und Strecken j desselben Standpunktes:

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZT}}(i,j) = \alpha(i) * ZT * sin(t_i - t_j) \tag{6.16}$$

Hinsichtlich eines möglichen Zentrierfehlers am Zielpunkt gelten analog die Ausführungen zu den Kovarianzen der Richtungsbeobachtungen. Im Falle eines identischen Zielpunktes für eine Richtung i und eine Strecke j läge zwar theoretisch ein zusätzlicher Kovarianzanteil für diese beiden Beobachtungen vor, jedoch bestünde aufgrund deren Winkelabstandes von Null nach (6.16) wiederum keine Korrelation.

Ferner sind tachymetrische Beobachtungen unterschiedlicher Standpunkte theoretisch über mögliche Zentrierfehler identischer Zielpunkte korreliert. Dabei gilt in diesem Sinne für die Korrelation zweier Richtungen oder zweier Strecken Beziehung (6.13) und für die Korrelation einer Richtung mit einer Strecke Beziehung (6.16). In der Praxis sind diese Korrelationen aber eher nicht so zu erwarten, da in größeren Netzen die Standpunkte an verschiedenen Tagen besetzt werden und somit die Zentrierfehler der Zielpunkte infolge deren tageweisen und daher unabhängigen Signalisierungen nicht stochastisch-systematisch wirken können.

6.3.3.3 Roverseitiger Zentrierfehler

Der

ZG = Zentrierfehler des verwendeten GNSS-Basis-Rovers

wirkt stochastisch-systematisch auf beobachtete GNSS-Basislinien. Mit Verwendung herkömmlicher optischer Lote für die Roverzentrierung gelten die Aussagen zur Größenordnung des tachymeterseitigen Zentrierfehlers analog.

Dabei entspricht die Fehlerwirkung auf die Beobachtung der Rechts- oder Hochwertdifferenz der Wirkung des Zentrierfehlers des Tachymeters auf die Streckenbeobachtungen und es gilt so für die Hauptdiagonale der Submatrix der GNSS-Basislinien im $\boldsymbol{C}_{\varepsilon}$-Kovarianzmatrixzuschlag $\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}$ der durch die GNSS-Basis-Rover-Zentrierung bedingten stochastisch-systematischen Fehleranteile:

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Re}, i_{Re}) = ZG^2 \tag{6.17a}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Ho}, i_{Ho}) = ZG^2 \tag{6.17b}$$

Tritt ein entsprechender Zentrierfehler in derselben Größenordnung auch noch am Zielpunkt auf, so gilt für diese Hauptdiagonalenelemente alternativ zu Gleichungen (6.17a) und (6.17b):

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Re}, i_{Re}) = 2 * ZG^2 \tag{6.17c}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Ho}, i_{Ho}) = 2 * ZG^2 \tag{6.17d}$$

Für die Ermittlung der Kovarianzen der GNSS-Basislinien ist zu berücksichtigen, dass Rechts- und Hochwertdifferenzen aufgrund ihrer Orthogonalität nicht über einen ebensolchen Zentrierfehler korreliert sind, so dass für die zugehörigen Kovarianzen gilt:

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Re}, i_{Ho}) = 0 \tag{6.18a}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Re}, j_{Ho}) = 0 \tag{6.18b}$$

Innerhalb der Gruppe der Rechts- oder Hochwertdifferenzen besteht hingegen eine unmittelbare Korrelation, so dass für die zugehörigen Kovarianzen mit einem Korrelationskoeffizienten von eins gilt:

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Re}, j_{Re}) = ZG^2 \tag{6.19a}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}}(i_{Ho}, j_{Ho}) = ZG^2 \tag{6.19b}$$

Hinsichtlich eines möglichen Zentrierfehlers am Zielpunkt gelten analog die Ausführungen zu den Kovarianzen der Richtungsbeobachtungen im Zuge der Betrachtungen des tachymeterseitigen Zentrierfehlers.

6.3.3.4 Summenwirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer Fehleranteile (δ)

Analog zu Gleichung (6.4) für die (streckenbezogenen) deterministisch-systematischen Fehleranteile ergibt sich die Summe der stochastisch-systematischen Fehleranteile als Kovarianzmatrixzuschlag für $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ zu

$$\boldsymbol{C}_{\delta} = \boldsymbol{C}_{\delta_M} + \boldsymbol{C}_{\delta_{ZT}} + \boldsymbol{C}_{\delta_{ZG}} \tag{6.20}$$

6.4 Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen

Eine geeignete Quantifizierungsmethode systematischer Fehleranteile bildet eine der Grundlagen für die Analyse netzverzerrender Einflüsse und Wirkungen und ist ein elementarer Bestandteil des zugehörigen Analysekonzeptes für Lagenetze (s. Kapitel 6.8).

Zur Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen sei analog zur Quantifizierung jener Anteile im geometrischen Nivellement nach Kapitel 4 aus BRUNKHORST (2012a) deren stochastische Wirkung auf die Parameter grundlegend und eine Verhältnisbildung zur entsprechenden Wirkung der zufälligen Anteile dienlich, in der sich spezielle stochastische Situationen des Beobachtungsraumes abbilden bzw. daraus erkennbar sind. Von besonderem Interesse wird dabei auch hier die stochastische Situation sein, welche zu einer bestimmten Äquivalenz zwischen der Wirkung der zufälligen Varianzanteile und der systematischen Fehleranteile führt.

6.4.1 Quantifizierungsalgorithmus

Der Algorithmus zur Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen entspricht prinzipiell dem analog für Nivellementnetze gültigen Algorithmus aus BRUNKHORST (2012a) und ist hier in einer für die Anwendung in Lagenetzen angepassten Form angegeben:

- Stochastische Modellierung der nicht-zufälligen Fehleranteile (als stochastisch-systematische Anteile δ und ggf. deterministisch-systematische Anteile ∇) mit gleichzeitiger (Quasi-) Nullsetzung der zufälligen Fehleranteile ε zur Ermittlung der auf den Einfluss der systematischen Anteile beschränkten, absoluten genauigkeitsanzeigenden Größen des Parameterraumes als insbesondere die Varianzen der gesuchten Netzkoordinaten.
- Ermittlung des sich aus jener Situation ergebenden durchschnittlichen Lagepunktfehlers M_P, δ bzw. M_P, ∇, welcher auf jene Weise zwar formal eine effektbelastete Größe darstellt, jedoch ohne dabei die Wirkung der zufälligen Varianzanteile der Netzbeobachtungen zu enthalten. Äquivalent dazu ergibt sich derselbe ausschließlich effektbelastete durchschnittliche Lagepunktfehler M_P, δ bzw. M_P, ∇ alternativ aus dem auf die zufälligen Fehleranteile ε in ihrer realistischen Größenordnung bezogenen Analogon M_P, ε und dessen effektbelasteter Form $M_P, \varepsilon\delta$ bzw. $M_P, \varepsilon\nabla$ zu $M_P, \delta = \sqrt{(M_P, \varepsilon\delta)^2 - (M_P, \varepsilon)^2}$ bzw. $M_P, \nabla = \sqrt{(M_P, \varepsilon\nabla)^2 - (M_P, \varepsilon)^2}$
- Gezielte maßstäbliche Veränderung der À-priori-Genauigkeiten aller Netzbeobachtungen im konventionellen Ausgleichungsansatz zur Herbeiführung des Äquivalenzfalls des ausschließlich aus den zufälligen Fehleranteilen ε resultierenden durchschnittlichen Lagepunktfehlers M_P, ε mit seinem aus dem Einfluss ausschließlich systematischer Anteile (δ, ∇) resultierenden Analogons M_P, δ bzw. M_P, ∇.
- Ergebnis der Quantifizierung ist eine Gruppe zueinander konsistenter beobachtungsbezogener eindimensionaler À-priori-Genauigkeiten, in welcher jeder beteiligte Beobachtungstyp über

eine dieser Genauigkeiten (s_r, s_s, s_{GNSS}) als sein für den Äquivalenzfall angepasstes durchschnittliches s_0 à priori vertreten ist.

Der Faktor für die gezielte maßstäbliche Änderung der eindimensionalen Größen des konventionellen stochastischen Beobachtungsmodells ergibt sich den zur Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Nivellementnetzen dargestellten Abhängigkeiten folgend ebenfalls unmittelbar als das Verhältnis zwischen dem ausschließlich effektbelasteten durchschnittlichen Lagepunktfehler M_P, δ bzw. M_P, ∇ (Zielgröße) und seinem konventionellen Analogon M_P, ε als Ausgangsgröße.
Analog ist für entsprechende Quantifizierungen in Lagenetzen zur gezielten maßstäblichen Änderung der zweidimensionalen Größen des konventionellen stochastischen Beobachtungsmodells (Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$) ebenso die quadratische Form des vorgenannten Faktors anzuwenden.

6.4.2 Vergleich zur Quantifizierung systematischer Anteile in Nivellementnetzen

Im Gegensatz zum Quantifizierungsergebnis systematischer Anteile in Nivellementnetzen lässt sich die stochastische Wirkung systematischer Anteile auf die Parameter anhand einer Gruppe von beobachtungsbezogenen und gegenüber ihren originären relativen Größenverhältnissen unveränderten À-priori-Genauigkeiten darstellen, falls unterschiedliche Beobachtungstypen im Lagenetz vorliegen und es sich somit nicht um ein reines Richtungs-, Strecken- oder GNSS-Basisliniennetz handelt.
Diese Gruppe umfasst für jeden im Lagenetz beteiligten Beobachtungstyp ein mittleres s_0 à priori, das sich für den Äquivalenzfall der zufälligen mit den systematischen Fehleranteilen aus der zugehörigen Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{C_{ll}}$ ergibt. Somit geben alle auf den Äquivalenzfall bezogenen mittleren s_0 à priori der Gruppe gemeinsam die parameterbezogene Wirkung systematischer Fehleranteile als Testgrößen an, die auf Beobachtungen bezogen und für zufällige Fehleranteile üblich sind.
Aufgrund der Einheitlichkeit der zur Herbeiführung des Äquivalenzfalls vorgenommen Skalierung der nach Beobachtungstyp unterschiedlichen s_0 à priori anhand des in Kapitel 6.4.1 dargestellten Faktors bleibt die relative Größenordnung dieser s_0 à priori innerhalb ihrer Gruppe stets erhalten.

Es fehlt hier aber die im Zuge der Quantifizierung systematischer Fehleranteile in Nivellementnetzen gegebene Weiterentwicklung einer für den Äquivalenzfall gefundenen beobachtungsbezogenen Testgröße wie der Genauigkeit des Standpunkthöhenunterschiedes $\sigma_{\Delta h}$ zu einer zusätzlichen genauigkeitsanzeigenden, beobachtungsbezogenen und für zufällige und geräteseitige Fehleranteile gebräuchlichen (eindimensionalen) Größe wie dem mittleren Kilometerfehler σ_{1km}.

Auch in Lagenetzen folgen zufällige und systematische Fehleranteile verschiedenen Modellbildungen, so dass aus den in Kapitel 2.2.2.6 erklärten Gründen ein steiles Eigenwertspektrum des allgemeinen EWP mit der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianzmatrix und dem Kovarianzmatrixzuschlag der systematischen Fehleranteile als Vergleichskovarianzmatrix resultiert.

Die verschiedenen Modellbildungen für zufällige und systematische Anteile finden ihre Ursachen darin, dass sich zufällige Varianzanteile wie (freie bzw. belastete) Schwingungen – als mechanische Analogien des Schwingungskörpers zum Netzdesign – verhalten (BILL et al. 1984, FINSTERWALDER 1903), die systematischen Varianzanteile hingegen häufig (durch z.B. Zentrierfehler) geometrisch induziert sind.

6.5 Induktionswirkungen nicht-zufälliger Fehleranteile in Lagenetzen

Die in Kapitel 6.2 aufgezeigten Ursachen für nicht-zufällige Fehleranteile sollen in ihrer Wirkung auf die Geometrie und die Stochastik der Parameter thematisch untersucht und bewertet werden.

Tab. (6.1) Strukturelle Übersicht der nicht-zufälligen Fehleranteile in Lagenetzen:

Ursache	Anschlusspunktbezug	Beobachtungsbezug
Deterministisch-systematisch	• Koordinate Anschlusspunkt • Satelliten-Orbitposition	• Falsche Richtungssatzorientierung • (EDM-) Additionskonstante • (EDM-) Maßstabsfehler
Stochastisch-systematisch	• Stochastisches Modell der stochastischen Festpunkte einer dynamischen Ausgleichung	• Meteorologische Beschickung bei EDM • Zentrierfehler Tachymeter • Zentrierfehler GNSS-Basis-Rover
Quasi-systematisch	• Nichtlinearitätsverzerrung wegen Taylorreihenabbruch nach dem 1. Glied	
Netzdesign 0. und 1. Ordnung	• Anzahl, Knotenpunkteigenschaft und Verteilung fester Anschlusspunkte	-
Geometrischer Zwang	• Spannungen zwischen Anschlusskoordinaten und Beobachtungen	
Realnetzstichprobe	-	• Repräsentativität der Realdaten

Zur Verifizierung von Knotenpunkteigenschaften in geodätischen Schwachformen siehe Anhang 6.4.

6.5.1 Stochastische Wirkung deterministisch-systematischer Fehler

6.5.1.1 Deterministisch-systematische Fehler in Lagenetzen

Kapitel 2.2.3 erklärt die Zuordnung deterministisch-systematischer Fehler zu der Gruppe der nicht-zufälligen Fehlertypen und deren stochastische Modellierung.

Obwohl die Ermittlung deterministisch-systematischer Fehler in klassischen geodätischen Lagenetzen weitgehend ausgeforscht und deren stochastische Modellierung theoretisch bekannt ist, soll mit Hilfe des historischen TP-Netzes *Hamburgisches Wattenmeer* ein vervollständigendes Beispiel zur qualitativen und quantitativen Analyse der Verzerrung eines geodätischen Netze infolge systematischer Fehler anhand der Ermittlung dieser Fehleranteile und Darstellung ihrer stochastischen Wirkung gegeben werden. Die zugehörigen Betrachtungen sind in Anhang 6.2 dargestellt.

6.5.1.2 Fazit

Der historische Lagebezug weist sowohl im Drehwinkel als auch im Hochwertshift eine signifikante Unterscheidung vom GNSS-gestützten Bezug auf, der auf das geodätische Datum der Lagefestpunkte der Insel Neuwerk im Lagestatus 100 abgeglichen ist; da der historische Bezug als Ist-System vorliegt, sind diese Parameter signifikanter Größenordnung als deterministisch-systematische Fehler interpretierbar, die im Falle des Drehwinkels der TP-Masche (inklusive der zugehörigen Verdichtungsstufen) gegen den „DREF-BRD"-Bezug als ∇l-Fehler direkt die historischen Richtungsbeobachtungen des Richtungsstandpunktes TP 1/2016 und im Falle des Hochwertshifts als ∇x-Fehler unmittelbar die Hochwertkoordinate dieses Ausgangspunktes belasten.
Die stochastische Modellierung aller vier deterministisch-systematischen Fehlerkomponenten führte zur Vergrößerung der mittleren Neupunktfehler auf die bis zu 2.5-fache Größe ihrer unbelasteten Situation und aufgrund der Majorität des Hochwertshifts innerhalb der Gruppe der deterministisch-systematischen Fehleranteile auch zur Ausrichtung der effektbelasteten Fehlerellipsen genähert entlang der Hochachse.

Der ausschließlich auf den zufälligen (geräteseitigen) Varianzanteilen basierende mittlere Lagepunktfehler beträgt – entsprechend der (mittleren) historischen À-priori-Genauigkeiten für die Richtungen $s_r = \pm 0.15$ mgon und die Strecken $s_s = \pm 55.75$ mm – $M_P, \varepsilon = \pm\, 47.7$ mm und für die ausschließliche Wirkung der gefundenen deterministisch-systematischen Fehleranteile $M_P, \nabla = \pm\, 46.2$ mm. Daraus ergibt sich ein Faktor zur Skalierung jener historischen À-priori-Genauigkeiten von 0.97 für den Äquivalenzfall der Wirkung beider Fehlerarten, so dass sich die stochastische Wirkung der systematischen Fehleranteile auf die Parameter über folgende beobachtungsbezogene s_0 à priori angeben lässt:

$s_r = \pm 0.15$ mgon und $s_s = \pm 54.45$ mm.

Die stichprobenunabhängige und daher verallgemeinerte stochastische quadratische Netzverzerrung beträgt $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C_{ll}}) = 47.35$ und somit die durchschnittliche Effektbelastung der konventionellen Stochastik einer Neupunktkoordinate 217.6 % in ihrer eindimensionalen Form; ohne Berücksichtigung der Kovarianzen beträgt diese Effektbelastung 133.9 %.

6.5.2 Stochastische Wirkung anschlusspunktbezogener stochastisch-systematischer Fehler

In angeschlossenen geodätischen Höhen- und Lagenetzen ist es möglich, dass die Anschlusspunkte nicht varianzfrei sondern stochastisch sind und somit ein eigenes stochastisches Modell im Sinne einer Kovarianzmatrix aufweisen. Findet eine Berücksichtigung dieser Kovarianzmatrix in einer L2-Norm-Ausgleichung statt, liegt eine sog. *dynamische* Ausgleichung vor; ohne Berücksichtigung einer aber tatsächlich vorhandenen Anschlusspunktstochastik erfolgt die Schätzung der Parameterstochastik zu günstig. Diese Fälle liegen vor, wenn eine hierarchische anstelle einer dynamischen Ausgleichung angewendet oder in einer dynamischen Ausgleichung das stochastische Modell der Anschlusspunkte, durch z.B. Beschränkung auf deren Varianzen, nicht vollständig eingeführt wird und stellen somit stets Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Anschlusspunkte dar.

Die stochastische Wirkung einer Vernachlässigung jener Art soll nachfolgend anhand eines geeigneten Lagenetzbeispiels gezeigt werden. Dazu werde zunächst die Stochastik von vier Neupunkten in einem hierarchischen Netzes mit vier (varianzfreien) Anschlusspunkten bestimmt und diese Neupunkte zu Verknüpfungspunkten erklärt. Im Sinne eines Verdichtungsnetzes stellen diese Verknüpfungspunkte in der zweiten und dritten Ausgleichung nun die Anschlusspunkte dar, worin die Anschlusspunkte der ersten Ausgleichung nicht mehr auftreten, aber jeweils vier weitere Neupunkte eingeführt werden. Zur Ermittlung der stochastischen Wirkung der Vernachlässigung der Anschlusspunktstochastik erfolgt die Schätzung der Stochastik jener vier Neupunkte in der zweiten Ausgleichung mit einem hierarchischen Ansatz, also über die Nullsetzung der Anschlusspunktstochastik, und in der dritten Ausgleichung mit einem dynamischen Ansatz unter Berücksichtigung der vollständigen Stochastik der Anschluss- bzw. Verknüpfungspunkte wie diese aus der ersten Ausgleichung erhalten wurde. Es ist zu erwarten, dass die dritte Ausgleichung des dynamischen Ansatzes im Vergleich zur zweiten Ausgleichung eine ungünstigere Neupunktstochastik liefert.

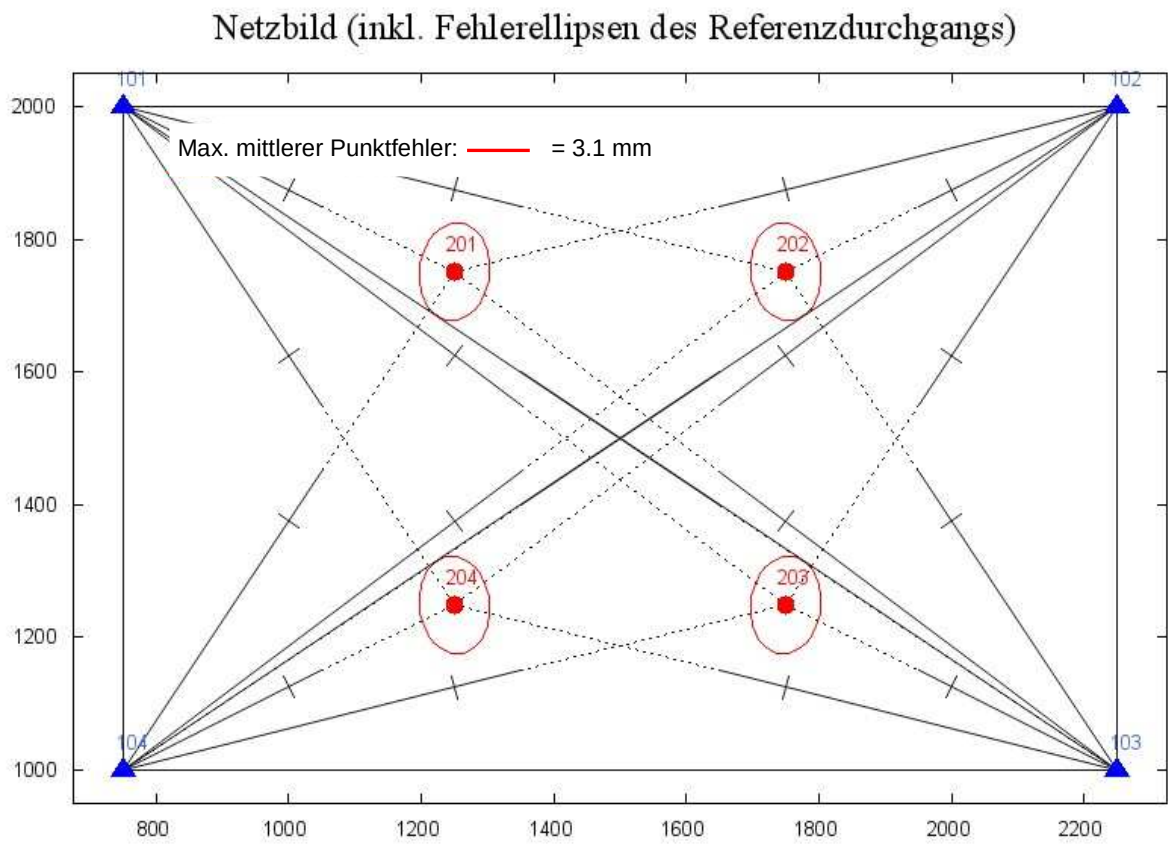
Da das stochastische Modell der Anschlusspunkte in geodätischen Netzen als anschlusspunktbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile betrachtet werden können, ist deren Wirkung identisch mit der hier zu untersuchenden Wirkung der zuvor definierten Vernachlässigung.

6.5.2.1 Das *Synthetische Verdichtungsnetz*

In Ermangelung realer, auf ein Verdichtungsnetz bezogener Messdaten und in Unabhängigkeit einer Realnetzstichprobe sei ein für diese Betrachtungen zielführendes Verdichtungsnetz konzipiert und im Netzplanungsmodus betrachtet. Darin seien die À-priori-Genauigkeiten jeweils einheitlich in den für Ingenieurnetze typischen Größenordnungen (Richtung: $s_r = \pm 1.0\,\text{mgon}$, Strecke: $s_s = \pm 3.0\,\text{mm}$) eingeführt.

Erzeugung der Verknüpfungspunkte (1. Ausgleichung):

Abb. (6.2a) Netzbild zur Erzeugung der Verknüpfungspunkte (201 bis 204, in rot dargestellt) via hierarchischer Ausgleichung:



Der *max. mittlere Punktfehler* ist definiert gemäß der Bemerkung zu Abb. (6.3a) aus Kapitel 6.5.3.1.

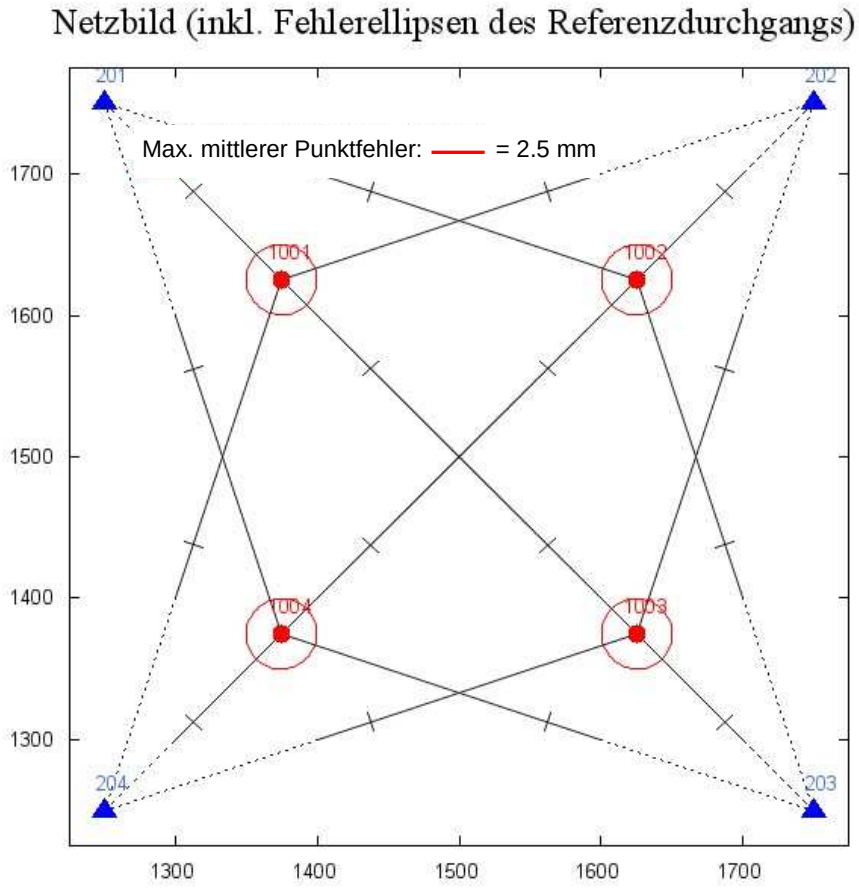
Die Verknüpfungspunkte stellen im Verdichtungsnetz die stochastischen Anschlusspunkte dar, deren vernachlässigtes stochastisches Modell die hier zu untersuchende stochastische Wirkung in den Neupunkten induziert und deren Bestimmung als mehrfache Polarpunkte von vier als varianzfrei angenommenen Festpunkten (101 bis 104) erfolge.

Die konventionellen mittleren Lagepunktfehler der Verknüpfungspunkte betragen $M_P, \varepsilon = \pm 3.1$ mm.

Erzeugung der Neupunkte (2. und 3. Ausgleichung):

Die Bestimmung der Neupunkte erfolge als freie Stationierungen mit Richtungs- und Streckenbeobachtungen zu jeweils allen vier Verknüpfungspunkten als Anschlusspunkte und ohne Beobachtungen untereinander, um die Wirkung der Vernachlässigung des stochastischen Modells dieser Anschlusspunkte unmittelbar testen zu können. Zu diesem Zweck seien diese Anschlusspunkte zunächst varianzfrei eingeführt (2. Ausgleichung).

Abb. (6.2b) Netzbild zur Erzeugung der Neupunkte (1001 bis 1004, in rot dargestellt) via hierarchischer (2.) Ausgleichung:



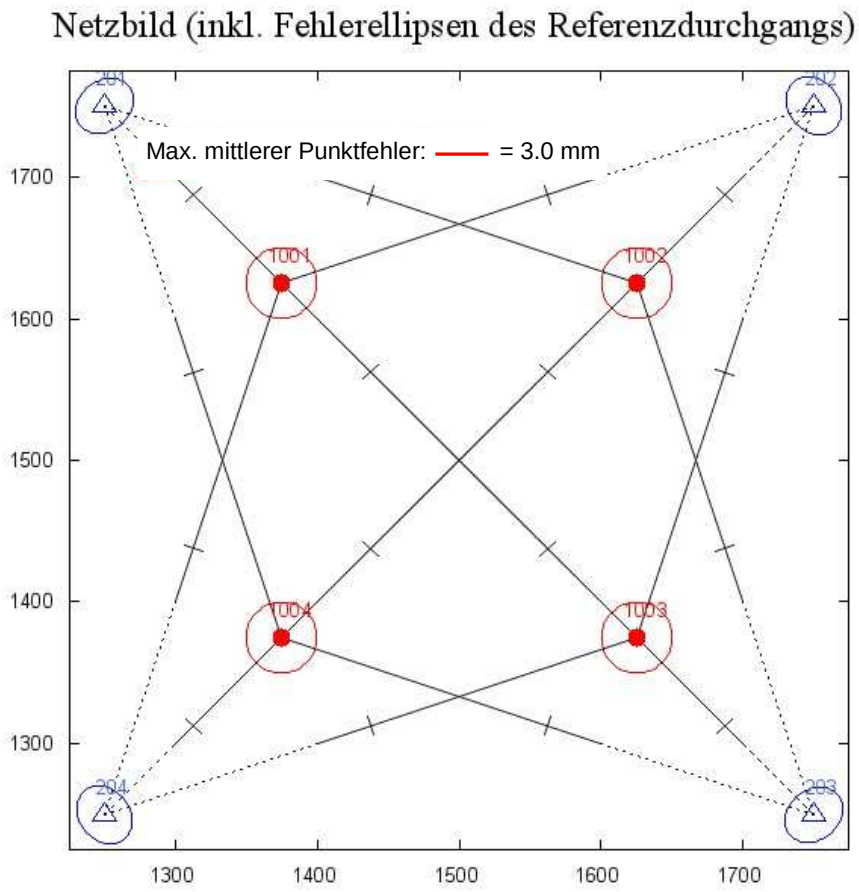
Der *max. mittlere Punktfehler* ist definiert gemäß der Bemerkung zu Abb. (6.3a) aus Kapitel 6.5.3.1.

Die konventionellen mittleren Lagepunktfehler der Neupunkte betragen $M_P, \varepsilon = \pm 2.5$ mm.

Zur Erzeugung der hier zu untersuchenden stochastischen Wirkung erfolgt nun die Einführung der Anschlusspunkte mit ihrem (vollständigen) stochastischen Modell als auf die Netzkoordinaten reduzierte Submatrix der Kovarianzmatrix der Parameter des hierarchischen Ausgleichungsansatzes zur Bestimmung dieser Anschlusspunkte als Verknüpfungspunkte (3. Ausgleichung). Die zugehörige Abbildung (6.2c) zeigt das entsprechende Netzbild, welches die Fehlerellipsen der Neupunkte in rot dargestellt und die sich für die Verknüpfungspunkte (201 bis 204) als stochastische Anschlusspunkte ergebenden Fehlerellipsen in blau dargestellt enthält.

Der *max. mittlere Punktfehler* ist definiert gemäß der Bemerkung zu Abb. (6.3a) aus Kapitel 6.5.3.1.

Abb. (6.2c) Netzbild zur Erzeugung der Neupunkte via dynamischer (3.) Ausgleichung:



Die effektbelasteten mittleren Lagepunktfehler der Neupunkte betragen $M_P, \varepsilon\delta = \pm 3.0$ mm.

6.5.2.2 Ergebnisse und Fazit

Aufgrund des Varianzenfortpflanzungsgesetzes gilt für die voneinander unabhängigen zufälligen (ε) und stochastisch-systematischen (δ) Fehleranteile folgende Beziehung zur Ermittlung des ausschließlich effektbelasteten mittleren Lagepunktfehlers:

$$M_P, \delta = \sqrt{(M_P, \varepsilon\delta)^2 - (M_P, \varepsilon)^2} = \sqrt{(3.0\text{ mm})^2 - (2.5\text{ mm})^2} = \pm 1.7\text{ mm}.$$

Damit ist die stochastische Wirkung auf die Neupunkte, welche sich aus der Vernachlässigung des stochastischen Modells der dynamischen Anschlusspunkte zu $M_P, \delta = \pm 1.7$ mm ergibt, in diesem Beispiel geringer als die reine Wirkung der zufälligen Beobachtungsfehler $M_P, \varepsilon = \pm 2.5$ mm. Nach dem Quantifizierungsalgorithmus für systematische Fehleranteile in Lagenetzen (Kap. 6.4.1) ergibt sich ein Faktor zur Skalierung der zufälligen À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten von 0.68 für den Äquivalenzfall der Wirkung beider Fehlerarten, so dass sich die stochastische Wirkung der Vernachlässigung des stochastischen Modells der dynamischen Anschlusspunkte über folgende s_0 à priori angeben lässt:

$s_r = \pm 0.68$ mgon und $s_s = \pm 2.04$ mm.

Die stichprobenunabhängige und daher verallgemeinerte stochastische quadratische Netzverzerrung beträgt $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}}) = 3.22$ und somit die durchschnittliche Effektbelastung der konventionellen Stochastik einer Neupunktkoordinate 63.5 % in ihrer eindimensionalen Form; ohne Berücksichtigung der Kovarianzen beträgt diese Effektbelastung 63.2 % – stets bezogen auf die hier untersuchte Effektbelastung der Vernachlässigung des stochastischen Modells der dynamischen Anschlusspunkte. Die Stochastik der dynamischen Anschlusspunkte befrachtet also die Stochastik der Neupunkte in einer Größenordnung von rund 60 % der Wirkung, die von ausschließlich zufälligen Beobachtungsfehlern für die Neupunkte ausgeht.

6.5.3 Stochastische Wirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer Fehler

In Lagenetzen induzieren die maßstabswirksame meteorologische Beschickung der beobachteten EDM-Strecken sowie die Zentrierfehler von Tachymeter und GNSS-Basis-Empfänger als originär zufällige aber stochastisch-systematisch wirksame Fehleranteile die Stochastik der zu schätzenden Parameter, insbesondere der gesuchten Netzkoordinaten. Da EDM-Strecken üblicherweise zu den Beobachtungen moderner geodätischer Lagenetze gehören und Zentrierungen über den Netzpunkten anhand von Stativen und optischen Loten und nur in Ausnahmen anhand von festen (Vermessungs-) Pfeilern vorgenommen werden, sollen die Wirkungen der meteorologischen Beschickung der EDM-Strecken- und der Zentrierfehler auf die Parameterstochastik gemeinschaftlich geschätzt werden.

Zu diesem Zweck und für die Betrachtungen der Kapitel 6.5.5 bis 6.5.7 sei das *Freinetz Rethebrücke* betrachtungsgegenständlich, da es infolge seines Designs mit polygonalen und Blockstrukturen für verschiedene Testzwecke gut geeignet ist.

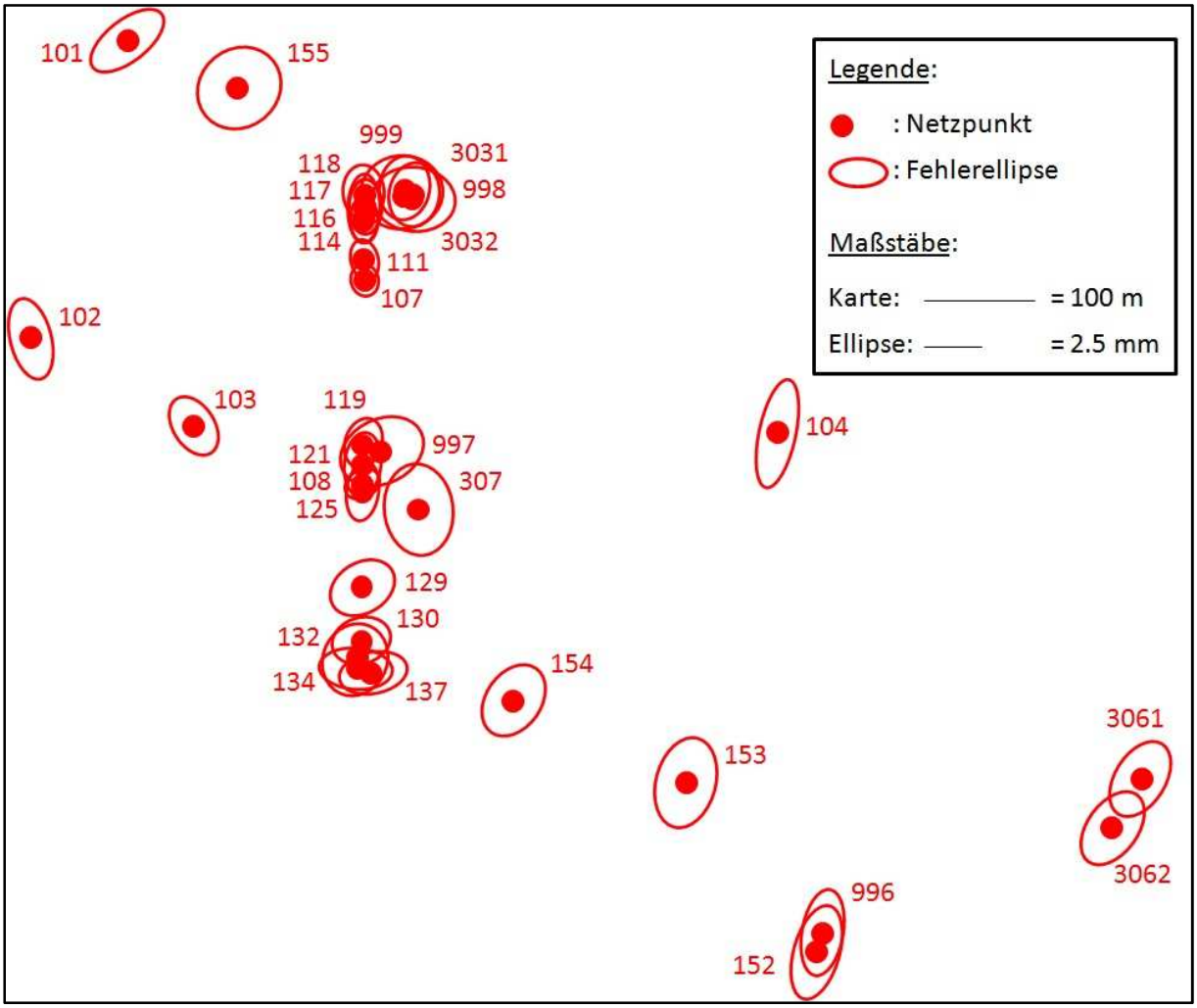
6.5.3.1 Das *Freinetz Rethebrücke*

Für den Hamburger Hafen stellt der Neubau der 1934 errichteten Rethe-Hubbrücke als Klappbrücke ein wichtiges infrastrukturelles Großprojekt dar. In diesem Zuge wurde aus Sicherheitsgründen die permanente geometrische Überwachung des alten Bauwerks – als Träger einer Straßen- und einer Eisenbahnverbindung – in Form eines geodätischen Monitorings erforderlich, dessen Anschlusspunkte nach Lage und Höhe anhand des *Freinetzes Rethebrücke* mit ursprünglich 148 Richtungs- und 149 EDM-Streckenbeobachtungen (inkl. Streckenbeobachtungen in Gegenrichtung) zwischen Dezember 2009 und dem Frühjahr 2010 erzeugt wurden.

Für die Belange dieser Arbeit seien jedoch Betrachtungen des Netzes in seiner aus Gründen der Übersichtlichkeit und Illustration reduzierten Form gemäß BRUNKHORST (2012b) mit 107 Richtungs- und 93 EDM-Streckenbeobachtungen sowie 32 Neupunkten ausreichend. Zur Entlastung des Inhalts der

folgenden Abbildung (6.3a), welche vor allem die stochastische Situation der Netzpunkte auf Basis der freien Ausgleichung zeigen soll, sei auf eine Darstellung der Netzbeobachtungen darin verzichtet.

Abb. (6.3a) *Freinetz Rethebrücke* in seiner hier betrachteten, gegenüber dem ursprünglichen Design reduzierten Form mit den Fehlerellipsen der konventionellen freien Ausgleichung:



Die in Abbildung (6.3a) dargestellten Fehlerellipsen zeigen die sog. *Helmertschen Fehlerellipsen* mit jeweils der großen Halbachse A_F und der kleinen Halbachse B_F, aus denen sich – ebenso wie aus den einfachen Standardabweichungen σ_{Re} und σ_{Ho} eines Neupunktes – dessen mittlerer Punktfehler M_P als sog. *Helmertscher Punktfehler* bilden lässt zu $M_P = \pm\sqrt{A_F^2 + B_F^2} = \pm\sqrt{\sigma_{Re}^2 + \sigma_{Ho}^2}$. Der maximale mittlere Punktfehler aus der Gruppe der 32 Neupunkte in Abbildung (6.3a) beträgt ± 2.6 mm und tritt an Netzpunkt 104 auf.

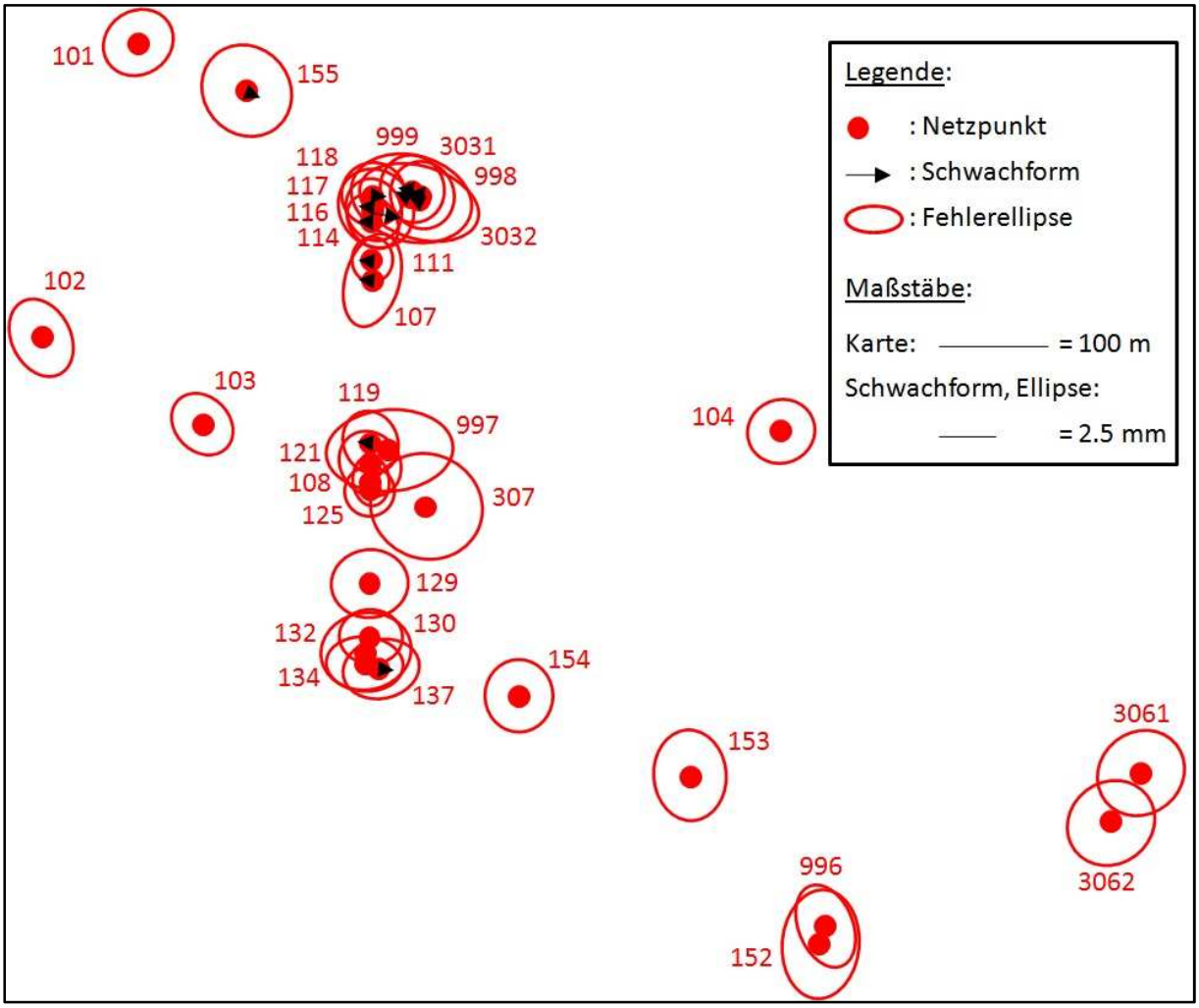
6.5.3.2 Ergebnisse und Fazit

Der für die Betrachtungen dieses Kapitels durchgeführten freien Realnetzausgleichung liegen die den tatsächlichen Verhältnissen entsprechenden À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten für die Richtungen

$s_r = \pm 1.0$ mgon (als einheitlicher Wert) und für die Strecken $s_s = \pm 1.5$ mm (als Mittelwert aller individuellen Einzelgenauigkeiten) zugrunde.

Die konventionellen mittleren Lagepunktfehler der Netzpunkte betragen durchschnittlich $M_P, \varepsilon = \pm 1.9$ mm.

Abb. (6.3b) Effektbelastete Fehlerellipsen und latente Hauptschwachform aufgrund der Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen im *Freinetz Rethebrücke*:



Das strenge stochastische Modell der Beobachtungen ergebe sich aus der Modellierung der À-priori-Genauigkeiten (im Sinne einfacher Standardabweichungen 1σ) von $\Delta T = \pm 2.0$ K und $\Delta P \pm 5.0$ hPa für die meteorologische Beschickung der EDM-Strecken sowie aus einer Modellierung eines Zentrierfehlers von $ZT = \pm 2.0$ mm (ebenfalls im Sinne einer einfacher Standardabweichung 1σ) für alle Netzpunkte. Die effektbelasteten mittleren Lagepunktfehler der Netzpunkte betragen durchschnittlich $M_P, \varepsilon\delta = \pm 2.3$ mm und so die durchschnittliche Effektbelastung eines konventionellen mittleren Lagepunktfehlers rund 72 %.

Nach dem Quantifizierungsalgorithmus für systematische Fehleranteile in Lagenetzen (Kap. 6.4.1) ergibt sich ein Faktor zur Skalierung der zufälligen À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten von 0.72 für

den Äquivalenzfall der Wirkung beider Fehlerarten; die stochastische Wirkung der Vernachlässigung im stochastischen Modell der Beobachtungen lässt sich daher über folgende s_0 à priori angeben zu:

$s_r = \pm 0.72$ mgon und $s_s = \pm 1.08$ mm.

Aufgrund einer nur geringen Mächtigkeit der aus den Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen resultierenden latenten Hauptschwachform von 26.1 % sowie einer nur geringen quantitativen Ausprägung dieses Effektes im 1-mm-Bereich lässt sich dessen Ausrichtung als seine qualitative Eigenschaft zwar darstellen, jedoch nicht aussagekräftig interpretieren.

Der maximale (effektbelastete) mittlere Punktfehler aus der Gruppe der 32 Neupunkte in Abbildung (6.3b) beträgt ± 3.4 mm und tritt an Netzpunkt 307 auf. Die maximale latente Hauptschwachform beträgt 1.2 mm (Netzpunkt 116), die mittlere latente Hauptschwachform lediglich 0.1 mm.

6.5.4 Geometrische und stochastische Wirkung quasi-systematischer Fehler

Die hier als quasi-systematisch bezeichneten Fehler stellen eine geometrisch und stochastisch auf die Netzkoordinaten wirkende Nichtlinearitätsverzerrung infolge der Linearisierung nichtlinearer Modelle zur Abbildung des Parameterraumes auf den Beobachtungsraum dar. Ausweislich der dazu an einem einseitig angeschlossenen Polygonzug im Kapitel 5.7.2 erzielten Ergebnisse tritt jedoch dieser Effekt geometrisch und stochastisch selbst im Falle konventioneller mittlerer Lagepunktfehler von über 2 m lediglich im Sub-Millimeterbereich auf und erreicht somit keine für geodätische Belange relevante Größenordnung.

6.5.5 Stochastische Wirkung des Netzdesigns 0. und 1. Ordnung

Das Netzdesign 0. und 1. Ordnung versteht sich für die Ausführungen dieses Kapitels im Sinne eines Vorhandenseins von Anschluss- oder Datumspunkten (Netzdesign 0. Ordnung) bzw. deren Verteilung (Netzdesign 1. Ordnung), analog zur Tabelle (3.1) aus Kapitel 3.1.

Analog zu den an geometrischen Nivellementnetzen in Kapitel 5.4 aus BRUNKHORST (2012a) durchgeführten Betrachtungen sollen hier Einflüsse des Netzdesigns auf die stochastische Wirkung stochastisch-systematischer Fehleranteile in Lagenetzen untersucht werden. Diese Fehleranteile gehen in Lagenetzen beobachtungsseitig auf die in Kapitel 6.5.3 und anschlusspunktseitig auf die in Kapitel 6.5.2 betrachteten Einflüsse zurück und sind nicht in der Art physikalisch induziert wie die stochastisch-systematischen Fehleranteile des geometrischen Nivellements. Zur besseren Vergleichbarkeit verschiedener Effekte auf die Parameterstochastik erfolgen Betrachtungen zur Wirkung des Netzdesigns am Prüfling des Kapitels 6.5.3 mit demselben konventionellen und strengen stochastischen Modell der Beobachtungen.

In Anlehnung an die aus den Untersuchungen geometrischer Nivellementnetze in Kapitel 5.4 aus BRUNKHORST (2012a) dazu gewonnenen Erkenntnisse sei auch für Lagenetze von der maximalen Wirkung stochastisch-systematischer Fehleranteile im Falle freier Netzformen ausgegangen und in Fortführung der Ergebnisse aus Kapitel 6.5.3 sukzessive (zusätzliche) Anschlusspunkte eingeführt.
Da jedoch die natürliche Hauptschwachform des *Freinetzes Rethebrücke* keine strengen Knotenpunkte im Sinne des zugehörigen Algorithmus aufweist, seien dafür Netzpunkte gewählt, die jene Eigenschaft entweder bestmöglich erfüllen (Quasi-Knotenpunkte) oder im Hinblick auf Tests zu stochastisch optimierten Datumsfestlegungen kontrastierend dazu mit maximaler natürlicher Hauptschwachform (Non-Knotenpunkte).

6.5.5.1 Wirkung des Designs 0. Ordnung

Den Erkenntnissen zur Wirkung des Designs 0. Ordnung in Netzen des geometrischen Nivellements in Kapitel 5.4.2 aus BRUNKHORST (2012a) folgend wird auch für Lagenetze erwartet, dass sich die auf den Einfluss stochastisch-systematischer Fehleranteile beruhende (diskrete) Netzverzerrung mit der zunehmenden Einführung von Anschlusspunkten ebenso verringert wie der durchschnittliche, mit dem Effekt dieser Fehleranteile belastete mittlere Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$ bzw. M_P, δ. Zu diesem Zweck seien zunächst 103 und 107 als Netzpunkte mit nicht strengen aber bestmöglichen Knotenpunkteigenschaften der natürlichen Hauptschwachform als Anschlusspunkte mit ihren ausgeglichenen Lagekoordinaten der konventionellen Ausgleichung (Referenzdurchgang) eingeführt, weil ein Lagenetz über mindestens zwei Festpunkte anzuschließen ist und die aus den originären Beobachtungen resultierende innere Netzgeometrie für die hier vorgenommenen Tests zur Wirkung des Netzdesigns auf die konventionelle und auf die effektbelastete Parameterstochastik nicht durch geometrische Zwänge zwischen ebendiesen Beobachtungen und den Anschlusskoordinaten zusätzlich belastet sein soll.

Tab. (6.2a) Freie bzw. zunehmend redundante hierarchische Realnetzausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten und einer Effektbelastung durch δ-Fehler:

Anz. FPs	Diskrete Netzverzerrung $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Nrn. der zus. FPs
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	274.77	0.9	2.6	1.8_6	1.70	1.3	3.4	2.2_8	1.03	-
2	270.80	1.0	6.9	3.0_4	1.69	1.7	6.9	3.5_3	1.03	s.o.
3	269.34	1.1	6.4	2.9_5	1.67	1.7	6.6	3.4_7	1.02	111
4	271.83	1.0	5.2	2.6_3	1.66	1.5	5.4	3.1_9	1.03	119
5	250.60	1.0	5.0	2.5_7	1.66	1.5	5.4	3.1_8	1.03	114
6	237.59	1.0	5.0	2.6_2	1.65	1.5	5.4	3.2_3	1.04	117
7	235.14	1.0	5.0	2.6_0	1.64	1.5	5.3	3.1_7	1.03	3032
8	222.79	1.0	5.0	2.6_5	1.63	1.5	5.3	3.2_0	1.03	118

Die Einführung der zusätzlichen Anschlusspunkte mit ihren ausgeglichenen Koordinaten der freien Netzlösung bewahrt die durch die Beobachtungen gegebene innere Netzgeometrie vor äußerem Zwang und führt so – analog zu entsprechenden Prüfungen geometrischer Nivellementnetze – zur Invarianz des s_0 à posteriori – als globale genauigkeitsanzeigende Größe des Beobachtungsraumes – gegenüber Änderungen des Netzdesigns in der hier vorgenommenen Art. Dies gilt gleichermaßen für das auf die konventionelle als auch für das auf die Ausgleichung mit dem strengen stochastischen Beobachtungsmodell bezogene und etwas geringere s_0 à posteriori; im Gegensatz dazu und wiederum analog zu geometrischen Nivellementnetzen wirkt sich jenes strenge Modell erwartungsgemäß vergrößernd auf die Parameterstochastik aus.

Aufgrund der nur näherungsweise gegebenen Knotenpunkteigenschaften der sukzessiv zu Anschlusspunkten gewandelten Neupunkte mit natürlichen Hauptschwachformen zwischen 0.2 mm und 0.5 mm und infolge der geringen stochastischen Belastbarkeit dieser Knotenpunkteigenschaften bei einer Mächtigkeit der natürlichen Hauptschwachform von lediglich rund 18 % ließ sich jedoch anhand der damit einhergehenden Steigerung der Redundanz in der Datumsgebung des betrachteten Lagenetzes keine spürbar günstigere Parameterstochastik erzielen.

6.5.5.2 Wirkung stochastisch optimierter Designfestlegung

Kontrastierend zur sukzessiven Wandlung von Neupunkten mit näherungsweise Knotenpunkteigenschaften in (varianzfreie) Anschlusspunkte erfolge die Datumsgebung für dasselbe Lagenetz anhand von Netzpunkten mit maximaler natürlicher Hauptschwachform der freien Ausgleichung zwischen 1.1 mm und 1.7 mm aber unter sonst unveränderten Bedingungen. Die eindeutige Datumsgebung erfolge dabei über die Netzpunkte 104 und 152.

Tab. (6.2b) Freie bzw. zunehmend redundante hierarchische Realnetzausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten und einer Effektbelastung durch δ-Fehler:

Anz. FPs	Diskrete Netzverzerrung $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Nrn. der zus. FPs
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	274.77	0.9	2.6	1.8_6	1.70	1.3	3.4	2.2_8	1.03	-
2	272.54	1.4	3.9	2.8_1	1.69	2.1	4.8	3.5_9	1.03	s.o.
3	259.35	2.2	3.9	2.8_0	1.68	2.3	4.7	3.5_1	1.03	996
4	260.21	2.1	3.8	2.7_2	1.66	2.1	4.6	3.3_8	1.02	153
5	256.73	1.9	3.7	2.6_6	1.65	2.1	4.5	3.3_3	1.01	3061
6	256.52	1.9	3.7	2.6_0	1.64	2.0	4.4	3.3_4	1.01	3062

Die Stochastiken der Beobachtungen und der Parameter folgen im Zuge der Einführung zusätzlicher Anschlusspunkte ohne Knotenpunkteigenschaften im Wesentlichen denselben Gesetzmäßigkeiten wie im Kapitel 6.5.5.1 mit Knotenpunkteigenschaften der Anschlusspunkte.
Die Wirkung der stochastisch optimierten Designfestlegung mit Verwendung von Knoten- bzw. Netzpunkten minimaler natürlicher Hauptschwachform als Anschlusspunkte gegenüber dem konträren Fall mit Anschlusspunkten maximaler natürlicher Hauptschwachform fällt in diesem Realnetzbeispiel für die konventionelle Parameterstochastik bei einer maximalen Größenordnung von 8 % uneinheitlich aus und verkleinert die effektbelastete Parameterstochastik einheitlich um maximal 6 %.
Die diskrete Netzverzerrung $\overline{\delta'}^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{ll}})$ reagiert uneinheitlich und um maximal 8 % auf denselben Effekt.

6.5.5.3 Bewertung und Fazit

Der Effekt der stochastisch optimierten Designfestlegung führt bei Verwendung von Knotenpunkten mit nullwertigen natürlichen Hauptschwachformen im nivellitischen *Freinetz Francop-Waltershof* zur Verbesserung der konventionellen und der effektbelasteten Parameterstochastik um bis zu ca. 40 % im Vergleich zum konträren Fall mit stochastisch maximal ungünstigen Anschlusspunkten. Die geringe Ausprägung dieses Effekts in einer Größenordnung von bis zu 8 % im Prüfling *Freinetz Rethebrücke* findet ihre Ursache in der nur näherungsweise gegebenen Knotenpunkteigenschaft der verwendeten Anschlusspunkte mit natürlichen Hauptschwachformen von 0.2 mm bis 0.5 mm gegenüber 1.1 mm bis 1.7 mm für die Anschlusspunkte des konträren Falls.

Tendenziell ist jedoch die nach der Theorie über zusätzliche Stützpunkte (JÄGER 1989) zu erwartende günstigere Schätzung zumindest der effektbelasteten Parameterstochastik bei Verwendung von Quasi-Knotenpunkten als Anschlusspunkte anhand dieses Beispiels nachweisbar.

6.5.6 Geometrische und stochastische Wirkung geometrischen Zwangs

Geometrischer Zwang zwischen den Beobachtungen und den gegebenen Koordinaten hierarchischer Anschlusspunkte wirkt verzerrend auf die Geometrie und die Parameterstochastik von Lagenetzen.

6.5.6.1 Methodik

Am Beispiel des *Freinetzes Rethebrücke* soll der Einfluss dieses Zwanges auf die geometrischen und stochastischen Ergebnisse der konventionellen und der durch beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile δ zusätzlich belasteten Ausgleichung mit Beachtung der Wirkung der Randbedingung einer Verwendung von (Quasi-) Knotenpunkten der natürlichen Hauptschwachform als Anschlusspunkte untersucht werden.

Im Sinne einer besseren geometrischen Transparenz beschränken sich die hierfür betrachteten hierarchischen Ausgleichungsansätze stets auf zwei Anschlusspunkte, deren Lagekoordinaten zum Aufbau

der erforderlichen Netzspannung vektoriell um jeweils 5 mm zu ihren ausgeglichenen Positionen der freien Netzausgleichung und damit gegenüber der sich aus den Beobachtungen ergebenden inneren Netzgeometrie und radial zueinander in Vergrößerung ihres Abstandes verändert seien. Es lässt sich anhand eines Vergleichs der Ergebnisse dieser Methode entsprechend der auf den Referenzdurchgang bezogenen Reaktion der Parameterstochastik auf die unmittelbare Verzerrung der Koordinaten der Anschlusspunkte aus Tab. (A.6.3.1b) mit der Reaktion der Parameterstochastik auf die Modellierung der Anschlusskoordinatenänderung als deterministisch-systematische und auf die Anschlusspunkte bezogenen Fehleranteile ∇x (vgl. Kapitel 2.2.3) aus Tab. (A.6.3.1a) zeigen, dass sich beide Reaktionen als stochastische Verzerrungseffekte unter sonst identischen Bedingungen unterscheiden. Ursächlich dafür ist der Unterschied in der Methode zur Einführung des netzverzerrenden Zwangs, welche über die Änderung der Anschlusskoordinaten anhand eines deterministischen und über die Modellierung der ∇x-Fehler anhand eines stochastischen Ansatzes umgesetzt wird.

Die entsprechenden auf die effektbelastete Ausgleichung bezogenen geometrischen und stochastischen Verzerrungseffekte infolge geometrischer Zwangsausübung ergeben sich aus einem Vergleich mit den effektbelasteten Situationen ohne Zwang.

Die zugehörigen Betrachtungen sind in Anhang 6.3 dargestellt.

6.5.6.2 Bewertung und Fazit

In der konventionellen Ausgleichung erhöht sich der für die Parameterstochastik repräsentative durchschnittliche mittlere Lagepunktfehler um 56 % für Quasi-Knotenpunkte als Anschlusspunkte und um 63 % für Anschlusspunkte maximaler natürlicher Hauptschwachform (Non-Knotenpunkte). In beiden Fällen ist die zugehörige Schwachform näherungsweise tangential zum Netzschwerpunkt ausgerichtet und mit der Entfernung zum Schwerpunkt wachsend im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Jene Resultate nehmen auf die Modellierung des geometrischen Zwangs als anschlusspunktseitige ∇x-Fehler Bezug. Mit Einführung dieses Zwangs als unmittelbare Änderung der Anschlusskoordinaten ergibt sich eine geringere Verschlechterung der konventionellen Parameterstochastik um rund 21 % für Quasi-Knotenpunkte und um 3 % für Non-Knotenpunkte als Anschlusspunkte.

In der Ausgleichung mit dem strengen stochastischen Modell erhöht sich der durchschnittliche mittlere Lagepunktfehler um 13 % für Quasi-Knotenpunkte als Anschlusspunkte und um 3 % für den Fall mit Non-Knotenpunkten. Aussagen zur geometrischen Verzerrungswirkung sind in beiden Fällen jedoch nicht belastbar, da die mittlere einzelpunktbezogene Hauptschwachform ohne oder mit Einfluss geometrischen Zwangs gemäß der Abbildungen (A.6.3.1b), (A.6.3.1c), (A.6.3.2b) und (A.6.3.2c) 0.3 mm und die Mächtigkeit der zugehörigen Hauptschwachform 30 % der Netzverzerrung nicht überschreitet.

Die Einführung geometrischen Zwangs als Spannung zwischen Beobachtungen und Anschlusspunktkoordinaten verursacht im durch polygonale und Blockstrukturen geprägten hierarchischen Lagenetz

Rethebrücke geometrische und stochastische Verzerrungseffekte. Dabei erfolgt für diesen Prüfling die Belastung der konventionellen Parameterstochastik mit durchschnittlich 12 % etwas stärker als im Falle der mit stochastisch-systematischen Fehleranteilen belasteten Parameterstochastik mit im Mittel 8 %. Die mit jenen δ-Fehleranteilen vorbelastete Stochastik reagiert ergo schwächer auf geometrische Zwänge als sich auf zufällige Varianzanteile reduzierende konventionelle Parameterstochastiken. Jene Aussagen gelten für die Einführung des Zwangs als unmittelbare Änderung der Anschlusskoordinaten. Knotenpunkteigenschaften der verwendeten Anschlusspunkte im Sinne einer stochastisch optimierten Designfestlegung des Prüflings wirken sich auf diese Zusammenhänge uneinheitlich und nur in geringem Maße aus.

6.5.7 Stochastische Wirkung einer Realnetzstichprobe

Die Wirkung stochastisch-systematischer Fehleranteile δ auf die Stochastik der Parameter und auf die Netzverzerrung lässt sich mit einer Netzprognose stichprobenunabhängig und so als Vergleichsbezug für stichprobengebundene Betrachtungen darstellen, deren hier gesuchter Einfluss auf diese Zielgrößen Parameterstochastik und Netzverzerrung sich somit aus einem direkten Vergleich mit den Ergebnissen der Netzprognose ergibt.

Nach den bisherigen Erkenntnissen über das Verhalten stochastisch-systematischer Fehleranteile δ ist deren Effekt insbesondere in geometrischen Nivellementnetzen für freie Netzformen maximal, jedoch in freien Lagenetzen ebenfalls deutlich ausgeprägt. Aus diesem Grunde und wegen der Konsistenz zu den Ergebnissen der vorangehenden Kapitel komme auch für den hier betrachteten Aspekt des Effekts einer Stichprobe u.a. das *Freinetz Rethebrücke* zum Zuge.

In Anlehnung an die gleichgerichtete Analyse im Kontext mit geometrischen Nivellementnetzen sind entsprechend Kapitel 5.6.2 aus BRUNKHORST (2012a) den À-posteriori-Beobachtungsgenauigkeiten entsprechende À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten einzuführen, um die stichprobenbezogene Wirkung nicht anhand von À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten zu belasten, die nicht die tatsächlichen Verhältnisse wiedergeben.
Für diesen Zweck ist es zwar denkbar, das s_0 à priori entsprechend einer bestmöglichen Repräsentanz der tatsächlichen Stochastik des Beobachtungsraumes als das s_0 à posteriori (einer konventionellen Ausgleichung ohne Modellierung systematischer Fehler) zu wählen, jedoch ist diese Methode nicht zwingend zielführend, da die Konvergenz dieser s_0-Schätzung bisher nicht bewiesen ist (KOCH 1997).

6.5.7.1 Ergebnisse

Für die Ausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* zeigt sich, dass die globalen À-priori-Genauigkeiten $s_r = \pm 1.52$ mgon und $s_s = \pm 1.77$ mm den À-posteriori-Genauigkeiten entsprechen.

Als weiterer Prüfling sei das Punktfeld des ursprünglich als Nivellementnetz eingeführten Prüflings *Schlickdeponie Hamburg-Francop* (vgl. Kap. 5.6.1 aus BRUNKHORST (2012a)) betrachtet, dessen

tachymetrische Beobachtung und konventionelle freie Ausgleichung in SCHUSTER (2013) gezeigt und dessen Netzdesign von einer Polygonschleife dominiert wird und so in dieser Eigenschaft zum Design des *Freinetzes Rethebrücke* kontrastiert. Die stichprobenbezogene Wirkung sei hier ebenfalls anhand der Effektbelastung durch δ-Fehler betrachtet.

Tab. (6.3a) Ausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit auf die À-posteriori- abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz:

Anz. FPs	Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$ bzw. $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Art
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	577.15	1.0	2.6	1.8_1	1.64	1.9	4.4	3.1_4	1.64	Prog.
0	223.81	1.0	2.6	1.8_2	1.65	1.3	3.0	2.0_8	1.09	Real

Tab. (6.3b) Ausgleichung des Lagenetzes *Schlickdeponie Hamburg-Francop* mit auf die À-posteriori-abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz:

Anz. FPs	Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$ bzw. $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Art
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	754.07	4.8	7.2	5.8_5	0.95	9.6	15.3	12.1_7	0.95	Prog.
0	190.03	4.8	7.3	5.9_3	0.96	5.5	8.8	6.9_9	0.55	Real

Es zeigt sich, dass die globalen À-priori-Genauigkeiten $s_r = \pm 0.97$ mgon und $s_s = \pm 0.91$ mm den À-posteriori-Genauigkeiten entsprechen.

Als dritter Prüfling sei das Lagenetz *Stupferich* der Baden-Württembergischen Landesvermessung eingeführt, da es sich hierbei nicht um ein freies Lagenetz handelt und die stochastische Wirkung einer Realnetzstichprobe anhand dieses Beispiels auch für angeschlossene Netze gezeigt werden kann.
Dieses Lagenetz umfasst 27 Neupunkte, die über 130 Richtungen, 51 Strecken und 21 GNSS-Basislinien an einen varianzfreien und 19 dynamische Festpunkte angeschlossen sind.
Es zeigt sich, dass folgende globale À-priori-Genauigkeiten mit den À-posteriori-Genauigkeiten kompatibel sind: $s_r = \pm 2.18$ mgon, $s_s = \pm 4.70$ mm, $s_{GNSS} = \pm 4.61$ mm, $s_{FP} = \pm 6.52$ mm.
Dabei gelten die stochastischen Angaben s_{GNSS} für die GNSS-Basislinien und s_{FP} der dynamischen Festpunkte jeweils pro Koordinatenrichtung.

Tab. (6.3c) Ausgleichung des Lagenetzes *Stupferich* mit auf die À-posteriori- abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz:

Anz. FPs	Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$ bzw. $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Art
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
20	177.26	3.4	8.3	5.9_7	4.04	4.1	9.8	6.9_3	4.04	Prog.
20	73.18	3.4	8.2	5.9_5	4.03	3.5	8.2	5.8_1	3.38	Real

6.5.7.2 Bewertung und Fazit

Konform zu den theoretischen Überlegungen gemäß Kapitel 5.6.2 aus BRUNKHORST (2012a) zur beeinflussenden Wirkung einer Realnetzstichprobe auf die Netzverzerrung und auf die Parameterstochastik genauigkeitsvorbetrachteter geodätischer Netze tritt analog zu den entsprechenden Reaktionen geometrischer Nivellementnetze auch in den Fällender hier betrachteten (freien und angeschlossenen) Lagenetze eine Herabsetzung der Netzverzerrung – hier auf 38.8 % bis 41.3 % des Wertes der stichprobenunabhängigen Netzprognose – mit der Betrachtung der Realnetzstichprobe ein.

In demselben Zuge verringert sich der durchschnittliche effektbelastete mittlere Lagepunktfehler als repräsentative Testgröße der effektbelasteten Parameterstochastik auf 66.2 % bis 83.8 % seiner Größe aus der Netzprognose.

Die herabsetzenden Wirkungen der Realnetzstichproben sind für die hier betrachteten Beispiele in den freien Netzformen jeweils ausgeprägter als im angeschlossenen Lagenetz *Stupferich*.

6.5.8 Induktionswirkungen im langwellig belasteten Landesnetz *Rheingrenze*

Nach Abb. (A.6.1.1) aus Anhang 6.1 treten für die Transformation des frei ausgeglichenen Lagenetzes *Rheingrenze* in den ITRF-Bezug Restklaffungen von bis zu 1 m an den 89 entlang des 40 km langen Netzes verteilten ITRF-Stützpunkten auf, obwohl die mittleren Lagepunktfehler der konventionellen, also auf zufällige Fehleranteile gestützten freien Netzausgleichung lediglich 0.4 m erreichen. Diese geometrischen Verzerrungseffekte bilden nach Abb. (A.6.1.1) eine langwellige Schwachform mit der Netzlänge als halbe Wellenlänge aus und sind in diesem Verhalten typisch für die Wirkung nicht-zufälliger Fehlertypen in frei ausgeglichenen langgestreckten Lagenetzen. Stochastisch gestützte Erklärungsansätze für insbesondere die quantitativen Merkmale dieser Verzerrungen sollen daher mit Hilfe dieses Beispielnetzes aufgestellt werden, welches 2524 Richtungen, 2434 EDM-Strecken mit Zulassung von Strecken in der Gegenrichtung und 1261 Neupunkte umfasst. Der mittlere Redundanzanteil beträgt 0.414.

Aufgrund der aus Kapitel 6.5.7 bekannten herabsetzenden Wirkung von Realnetzstichproben auf die Netzverzerrung und die Parameterstochastik gegenüber dem Ergebnis einer stichprobenunabhängigen Netzprognose seien die Betrachtungen dieses Kapitels zur Erklärung der ausgeprägten langwelligen Schwachform im Sinne einer Maximalwertschätzung als Netzprognose durchgeführt.

Aufgrund der hier vorliegenden freien Netzform kommen aus dem Budget der nicht-zufälligen Fehleranteile nach Tab. (6.1) nur die jeweils beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen ∇ und stochastisch-systematischen Fehleranteile δ in Frage. Den Erkenntnissen über die hier im Sinne einer Nichtlinearitätsverzerrung auftretenden quasi-systematischen Varianzanteile aus Kapitel 5.7.2 folgend scheidet deren Wirkung als Erklärungsansatz aus.
Erklärungsansätze seien also hier über das strenge stochastische Modell der Beobachtungen geführt.

Für eine differenziertere Betrachtung seien zunächst nur die δ-Fehler in Ansatz gebracht. Es ergibt sich mit von $\Delta T = \pm 2.0$ K und $\Delta P \pm 5.0$ hPa für die meteorologische Beschickung aller EDM-Strecken sowie mit der Modellierung eines Zentrierfehlers von $ZT = \pm 2.0$ mm für alle Netzpunkte eine Netzverzerrung von 13087.57 sowie ein durchschnittlicher mit dem Effekt dieser Fehleranteile belasteter mittlerer Lagepunktfehler von 194 mm gegenüber seinem Pendant aus der konventionellen Ausgleichung von 168 mm; dies entspricht einer Zunahme von 15.2 %. Die zugehörige latente Hauptschwachform ist mit einer Mächtigkeit von nur 2.6 % der Netzverzerrung nicht repräsentativ.

Der in Tab. (6.4a) angegebene maximale mittlere Lagepunktfehler der konventionellen Ausgleichung ist entsprechend des Spektrums aller mittleren Lagepunktfehler desselben Ansatzes als Ausreißer aufzufassen, da der zweitgrößte Wert dieses Spektrums 382.4 mm beträgt. Vergleichbare Größenverhältnisse liegen für die effektbelastete Ausgleichung mit einem zweitgrößten mittleren Lagepunktfehler von 436.1 mm vor.

Tab. (6.4a) Freie Ausgleichung des *Rheingrenzennetzes* mit δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose:

Anz. FPs	Verallg. Netzverzerrung $\delta^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Art
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	13087.57	71.9	1995.9	168.2_7	3.58	86.2	2041.9	193.8_3	3.58	Prog.

Im nächsten Schritt seien zusätzlich zu den δ-Fehlern auch die ∇-Fehler zur Vervollständigung des strengen stochastischen Modells der Beobachtungen in Ansatz gebracht. Konkret handelt es sich dabei um die beiden auf das verwendete EDM-Modul bezogenen konstanten Fehler $\nabla_a = 1.0$ mm für die Additionskonstante sowie $f = 2.0$ ppm für die Grundfrequenz als EDM-Maßstabsfaktorfehler. Der

durchschnittliche mittlere Lagepunktfehler wächst infolge der Effektbelastung durch δ- und ∇-Fehler um 14.2 %; die zugehörige latente Hauptschwachform ist mit einem Anteil von nur 2.6 % der Netzverzerrung nicht repräsentativ.

Tab. (6.4b) Freie Ausgleichung des *Rheingrenzennetzes* mit δ- und ∇-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose:

Anz. FPs	Verallg. Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz				Effektbelastung				Art
		Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			s_0 post.	Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta\nabla$			s_0 post.	
		Min.	Max.	Mittel		Min.	Max.	Mittel		
		[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mgon] [mm]	
0	13135.57	71.9	1995.9	168.2_7	3.58	90.6	2038.7	192.2_4	3.58	Prog.

Vergleichbar zu den Ergebnissen des Ansatzes mit ausschließlich δ-Fehlern liegt auch hier für den maximalen effektbelasteten mittleren Lagepunktfehler ein Ausreißer vor; der zweitgrößte Wert jenes Spektrums beträgt lediglich 431.5 mm.

Mit der Hinzunahme der beiden deterministisch-systematischen Fehleranteile ∇ in einer realistischen Größenordnung beschränkt sich die Vergrößerung der verallgemeinerten quadratischen stochastischen Netzverzerrung $\bar{\delta}^2_{stoch}(\Delta \boldsymbol{C}_{ll})$ auf lediglich 0.4 % und es bildet sich sogar ein Rückgang des mit den Effekten der δ- und ∇-Fehler belasteten durchschnittlichen mittleren Lagepunktfehlers von 0.8 % aus.

Es wird deutlich, dass die Belastung des konventionellen Fehlerbudgets mit den hier betrachteten systematischen δ- und ∇-Fehleranteilen in ihren realistischen Größenordnungen lediglich zu maximalen mittleren Einzelpunktfehlern von knapp 0.44 m führt und somit nicht ausreicht, um den vorliegenden langwelligen geometrischen Verzerrungseffekt von bis 1 m zu erklären. Der für alle Ausgleichungsansätze für die mittleren Einzelpunktfehler aufgetretene Ausreißer von rund 2 m ist dafür ebenfalls nicht geeignet, da sich diese Stochastik jeweils nur auf einen einzigen Neupunkt beschränkt.

Aufgrund der Betrachtung ausschließlich freier Netzformen scheiden falsche Anschlusskoordinaten im Sinne grober bzw. deterministischer Fehler als Ursache des langwelligen Verzerrungseffekts ebenfalls aus. Nach den Ergebnissen der Varianzkomponentenschätzung der freien konventionellen Realnetzausgleichung mit einem Verhältnis des s_0 à posteriori zum s_0 à priori von 0.89 für die Richtungen und 0.96 für die EDM-Strecken ist das verwendete Beobachtungsmaterial zudem grobfehlerfrei.

Der hier aufgetretene langwellige geometrische Verzerrungseffekt ist mit den deterministischen und stochastischen Ausgleichungsansätzen dieser Arbeit daher nicht erklärbar und stellt so weiterhin ein geodätisches Forschungsgebiet dar. Die Art des hier betrachteten geometrischen Verzerrungseffekts als langwellige Schwachform lässt bisher nicht erkannte, zusätzliche Korrelationen der Beobachtungen

als Ursache dafür vermuten. Es macht aus Sicht des Autors Sinn, weitere Forschungsarbeiten hier anschließen zu lassen, um die genauen Ursachen für die langwelligen Schwachformen zahlreicher Landesnetze erkennen zu lassen und deren stochastisches Verhalten somit noch besser zu verstehen.

6.6 Ergebnisübersicht und Zwischenfazit

6.6.1 Ergebnisübersicht und Vergleich der betrachteten Beispielnetze, Tab. (6.5)

	Kriterium / Testgröße		Einheit	Hamburgisches Wattenmeer	Synthetisches Verdichtungsnetz	Freinetz Rethebrücke	Einseitig angeschl. Polygonzug	Freinetz Rethebrücke	Freinetz Rethebrücke	Freinetz Rethebrücke	Schlickdeponie Hamburg-Francop	Stupferich
Ausgleichungsmodus:	Prognose		Realnetz	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Art des nicht-zufälligen Fehlers	Deterministisch-systematisch:											
	• Anschlusspunktbezug			X								
	• Beobachtungsbezug			X								
	Stochastisch-systematisch:											
	• Anschlusspunktbezug				X							
	• Meteor. Beschickung EDM					X				X	X	X
	• Zentrierfehler Tachymeter					X				X	X	X
	Quasi-systematisch (2. Ord.)						X					
	Netzdesign 0. und 1. Ordnung							X				
	Geom. Zwang (stoch. Ansatz)								X			
	Realnetzstichprobe									X	X	X
Rahmendaten	Anzahl	Punkte	FP (σ = 0)		5	0	0	2	2	2	0	0	1
			FP (σ > 0)		0	4	0	0	0	0	0	0	19
			NP		5	4	32	20	30	30	32	48	27
		Beob.	Richtungen		32	16	107	40	107	107	107	104	130
			EDM-Strecken		4	16	93	20	92	92	93	54	51
			Basislinien		0	0	0	0	0	0	0	0	21
		Datumsdefekt d			0	0	3	0	0	0	3	3	0
	r	Gesamtredundanz			20	20	117	0	117	117	117	20	123
		Ø-Teilredundanz			0.56	0.50	0.59	0.00	0.59	0.59	0.59	0.13	0.47
	s_0 à priori	Richtungen		[mgon]	0.15	1.00	1.00	2.00	1.00	1.00	1.52	0.97	2.18
		EDM-Strecken		[mm]	56.1	3.00	1.51	2.00	1.51	1.51	1.77	0.91	4.70
		Basislinien		[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	4.61
		FP (σ > 0)		[mm]	-	2.05	-	-	-	-	-	-	6.52

	Kriterium / Testgröße		Einheit	Hamburgisches Wattenmeer	Synthetisches Verdichtungsnetz	Freinetz Rethebrücke	Einseitig angeschl. Polygonzug	Freinetz Rethebrücke	Freinetz Rethebrücke	Freinetz Rethebrücke	Schlickdeponie Hamburg-Francop	Stupferich
Konvent. Ausgleichung	s_0 à post. Richtungen		[mgon]	-	-	1.74	-	1.74	1.74	1.52	0.98	2.17
	s_0 à post. EDM-Strecken		[mm]	-	-	1.65	-	1.65	1.65	1.78	0.91	4.70
	s_0 à post. Basislinien		[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	4.61
	s_0 à post. FP (σ > 0)		[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	6.52
	Mächtigkeit natürliche HSF		[%]	95.0	21.2	18.4	97.1	63.1	63.1	22.0	42.6	15.5
	Anz. KnP. HSF frei			0	0	0	0	0	0	0	0	0
	NP = 100 %		[%]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Inkl. jeweiliger Fehleranteil	s_0 à post. Richtungen		[mgon]	-	-	1.19	-	1.74	1.74	1.18	0.61	1.84
	s_0 à post. EDM-Strecken		[mm]	-	-	0.93	-	1.65	1.65	1.06	0.30	4.12
	s_0 à post. Basislinien		[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	4.03
	s_0 à post. FP (σ > 0)		[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	5.49
	Mächtigkeit latente HSF		[%]	100	42.8	26.1	100	-	100	28.5	8.0	33.4
	Netzverzerrung	Prognose	[2D]	47.4	3.2	-	0.0	-	-	577	754	117
		Realnetz		-	-	274	-	-	128	224	190	73.2
	Eff.-Belastung der NP-Koordinate	Prognose	[%,1D]	218	63.5	-	0.4	-	-	300	280	147
		Realnetz		-	-	207	-	-	146	187	141	116
	Wie vor, nur ohne Kovarianzen	Prognose	[%,1D]	134	63.2	-	0.1	-	-	154	194	61.1
		Realnetz		-	-	87.8	-	129	212	68.9	73.1	-18
	Eff.-Belastung des mittl. Pkt.-Fehlers	Prognose	[%,1D]	99.8	66.3	-	0.0	-	-	142	182	58.9
		Realnetz		-	-	71.6	-	129	120	56.0	57.5	-22
Äquivalenzfall	Faktor für die konv. Stochastik	Prognose		1.00	0.66	0.72	0.00	1.29	1.20	1.42	1.82	0.59
		Realnetz								0.56	0.58	-
	s_0 à priori Richtungen	Prognose	[mgon]	0.15	0.68	0.72	0.00	1.29	1.20	2.16	1.77	1.29
		Realnetz								0.85	0.56	-
	s_0 à priori EDM-Strecken	Prognose	[mm]	56.1	2.04	1.08	0.00	1.95	1.81	2.51	1.66	2.77
		Realnetz								0.99	0.53	-
	s_0 à priori Basislinien	Prognose	[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	2.72
		Realnetz								-	-	-
	s_0 à priori FP (σ > 0)	Prognose	[mm]	-	-	-	-	-	-	-	-	3.85
		Realnetz								-	-	-

6.6.2 Zwischenfazit zu den Beispielnetzbetrachtungen

Die Wirkungen der nicht-zufälligen Fehleranteile lassen sich trotz des in Kapitel 3.3 vorgenommenen und hier angewendeten Quantifizierungsversuchs nur in umsichtiger Weise sinnvoll netzübergreifend vergleichen. Die Gründe dafür bestehen einerseits in den teilweise zu unterschiedlichen Ursachen der Netzverzerrungen; so lässt sich beispielsweise die Wirkung von Vernachlässigungen im stochastischen Modell der stochastischen Anschlusspunkte einer dynamischen Ausgleichung (s. Kapitel 6.5.2) oder geometrischer Zwang zwischen den Anschlusskoordinaten und den Beobachtungen (s. Kapitel 6.5.6) nicht auf ein freies Netz anwenden, da hierin Anschlusskoordinaten fehlen. Freie Netze sind jedoch zur Analyse der Wirkung des Netzdesigns 0. und 1. Ordnung (s. Kapitel 6.5.5) auf jeden Fall mit zu betrachten. Ferner führen jene unterschiedlichen Ursachen für Netzverzerrungen erwartungsgemäß auf unterschiedliche Wirkungen und Verzerrungen, deren Größenordnung wiederum unmittelbar von der Größenordnung der systematisch wirkenden Fehleranteile (z.B. eine in Kapitel 6.5.1 gefundene falsche Richtungssatzorientierung) abhängt. Diese Abhängigkeit lässt für die in Tab. (6.5) aufgeführten Netzverzerrungen und Effektbelastungen auch dann einen gewissen Spielraum zu, wenn jene Fehleranteile in realistischen Größenordnungen gewählt bzw. ermittelt werden. Hinsichtlich der Größenordnungen jener Effektbelastungen (und auch deren Ausrichtungen) besteht also eine gewisse Willkür.

Grundsätzlich hängen alle Netzverzerrungen und Effektbelastungen auch vom Netzdesign ab. Die hier betrachteten Netzprüflinge weisen überwiegend unterschiedliche Netzdesigns auf und tragen so mit den verschiedenen hier eingeführten systematisch wirkenden Fehleranteilen zu einer recht komplexen Ausgangssituation für die vorgenommenen Betrachtungen bei. Aus diesem Grunde sind für Vergleiche von Netzverzerrungen und Effektbelastungen stets die dafür existierenden Rahmenbedingungen wie Netzdesign, Art und Größenordnung des verzerrenden Effekts zu beachten. Es eröffnen sich somit aber auch die Möglichkeiten, verschiedene Verzerrungseffekte für dasselbe Netzdesign oder denselben Verzerrungseffekt für verschiedene Netzdesigns zu testen.

Für die Untersuchung des Landesnetzes *Rheingrenze* (s. Kapitel 6.5.8) bezüglich der dort auftretenden langwelligen Schwachformen wurden die in jenem Kontext relevanten Ursachen für Netzverzerrungen zusammengestellt und in ihren Größenordnungen realistisch festgelegt. Die so resultierenden Effektbelastungen konnten streng ermittelt und anhand eines quantitativen und qualitativen Vergleiches mit den tatsächlich existierenden Schwachformen als Erklärung für deren Existenz analysiert werden. Es zeigte sich jedoch, dass ebendiese Schwachformen aus dem bisher bekannten Ursachenportfolio für Netzverzerrungen heraus nicht vollständig erklärbar waren und somit diesbezüglich noch Forschungsbedarf besteht.

6.7 Optimierungskriterien zur Herabsetzung der Wirkung systematischer Fehleranteile in Lagenetzen

Die folgenden Aspekte sind grundsätzlich für die theoretische und praktische Geodäsie zu beachten, bilden jedoch speziell für die hier untersuchten Zusammenhänge die Optimierungskriterien für die Herabsetzung der Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile in Lagenetzen:

- Ein als Realnetz vorliegender und an ein gegebenes Datum anzuschließender Lagenetzprüfling ist zunächst einer freien Ausgleichung als Teilspurminimierung mit Verwendung der varianzfreien oder dynamischen Anschlusspunkte als Datumspunkte und Einführung deren Lagekoordinaten als Näherungswerte zu unterziehen, um simultan die Netzbeobachtungen und jene Anschlusspunktkoordinaten auf grobe Fehler zu prüfen, die sich als Differenzen zwischen den ausgeglichenen und den als Näherung eingeführten Koordinaten der Anschluss- bzw. Datumspunkte zeigen.
- Ein als Realnetz vorliegender Lagenetzprüfling ohne Datumsfestlegung ist zunächst einer freien Ausgleichung als Gesamtspurminimierung zu unterziehen, um die Netzbeobachtungen auf grobe Fehler zu prüfen, welche sich in der Varianzkomponentenschätzung bzw. dem Chi-Quadrat-Test als Homogenitätstest in der Größe der beobachtungstypbezogenen bzw. des globalen s_0 à posteriori im Verhältnis zum jeweiligen s_0 à priori zeigen.
- Prüfung der verwendeten EDM-Komponente durch Kalibrierung und ggf. Justierung zum Erhalt der Maßstabsstabilität und zur Vermeidung deterministisch-systematischer Fehleranteile, die aus einem falschen Maßstab der Streckenmessung oder aus einer falschen Additionskonstante für die Kombination aus EDM-Komponente und Reflektor resultieren.
- Die fehlende Berücksichtigung eines möglicherweise vorhandenen (vollständigen) stochastischen Modells der dynamischen Anschlusspunkte vergünstigt zwar die Parameterstochastik, ist jedoch unzulässig, wenn eine Stochastizität dieser Anschlusspunkte zu unterstellen und wenigstens näherungsweise bekannt ist.
- Verringerung der allgemeinen Ausprägung von Korrelation innerhalb der Gruppe der Streckenbeobachtungen:
  Eine möglichst exakte und repräsentative Erhebung der zur EDM-Beschickung erforderlichen meteorologischen Daten verringert nach Beziehung (6.10) die Größe der Kovarianz von zwei aufgrund ihrer Zugehörigkeit zu derselben EDM-Komponente und derselben meteorologischen Beschickungsgruppe korrelierten Streckenbeobachtungen.
- Die Durchführung der EDM-Streckenbeobachtungen mit möglichst verschiedenen Geräten unter verschiedenen meteorologischen Bedingungen und daher auch mit verschiedenen und unabhängig voneinander erhobenen Beschickungen verringert nach Beziehung (6.10) für die Kovarianz eines Streckenpaares mit maximaler Korrelation die Anzahl jener korrelierten Streckenpaare und damit die Anzahl von Elementen außerhalb der Hauptdiagonalen in der Kovarianzmatrix des strengen stochastischen Modells der Beobachtungen.

- Prüfung der verwendeten optischen Lote durch Kalibrierung und ggf. Justierung zur Verringerung der stets vorhandenen Zentrierfehler für Tachymeter und GNSS-Rover bzw. -Basis und damit zur Herabsetzung der Korrelation sämtlicher Beobachtungen in Lagenetzen nach Kapitel 6.3.3.2 bzw. Kapitel 6.3.3.3. Aus demselben Zusammenhang heraus ergibt sich infolge verringerter Zentrierfehler auch die Herabsetzung der nur auf die Hauptdiagonalenelemente wirkenden stochastisch-systematischen Fehleranteile in der Kovarianzmatrix des strengen stochastischen Modells der Beobachtungen.
- Erhöhung der Gesamtredundanz des Lagenetzes durch Einführung zusätzlicher Stützpunkte als Anschlusspunkte.
- Beachtung der Knotenpunkteigenschaft dieser Anschlusspunkte, bezogen auf die natürliche Hauptschwachform des frei ausgeglichenen Netzes.
- Vermeidung geometrischen Zwangs zwischen den Netzmessungen und den Festpunkten durch zuverlässige und genaue Messungen und kontrollierte Anschlusskoordinaten.

6.8 Konzept zur Analyse der Verzerrung von Lagenetzen infolge zufälliger und systematischer Modellfehler

Die Durchführung der folgenden Ausgleichungsansätze soll grundsätzlich im Netzplanungsmodus erfolgen, um stichprobenunabhängige Ergebnisse zu erhalten, die somit nicht durch eine diskrete Realnetzsituation belastet sind (vgl. Kap. 6.5.7).

1. Unabhängig etwaig vorliegender Datumsfestlegungen Durchführung einer freien Ausgleichung des gegebenen Lagenetzes zur Ermittlung der Orte des optimalen geodätischen Datums als Knotenpunkte der natürlichen Hauptschwachform gemäß SEWP der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter. Angabe des prozentualen Anteils dieser Punkte an allen Neupunkten.
2. Prüfung der natürlichen Hauptschwachform auf Dominanz. Diese liegt für eine Mächtigkeit des zugehörigen Eigenwertes jener Hauptschwachform von über 50 % der Eigenwertsumme oder für den Fall vor, dass dieser Eigenwert ein Vielfaches des zweitgrößten Eigenwertes beträgt, geht mit einem steilen Eigenwertspektrum des SEWP sowie mit einem dominanten, stochastisch auf die Neupunkte wirksamen Moment einher, wie es beispielweise für einen ausgeglichenen, beidseitig angeschlossenen Polygonzug mit maximalen Einzelpunktfehlern im Bereich der Zugmitte typisch ist. Mögliche Ursachen dafür sind:
   - Korrelationen im Beobachtungsmaterial
   - Langwellig wirkende und netzbeherrschende Fehlereinflüsse
   - Netzdesign

   Infolgedessen treten häufig Korrelationen zwischen den Netzpunkten auf, welche darüber hinaus dann im Allgemeinen erheblich unterschiedlich konventionell stochastisch belastet sind.
3. Ermittlung des maximalen Einflusses deterministisch- und stochastisch-systematischer Fehleranteile auf die Stochastik der Neupunkte ebenfalls im freien Lagenetz, da sich deren Wirkung mit der Einführung von Anschlusspunkten prinzipiell verringert. Dazu Nullsetzung der zufälligen beobachtungsbezogenen À-priori-Varianzanteile zur Ermittlung der größtmöglichen Wirkung der systematischen Fehleranteile auf die Neupunktstochastik als effektbelastete mittlere Punktfehler des freien Netzes (in diesem Sonderfall mit nullwertigen zufälligen Anteilen nach der im Kapitel 6.4.1 erklärten Methode zur Quantifizierung der systematischen Anteile). Zur Kategorisierung der Wirkung systematischer Anteile ist hier auch ein Vergleich mit den mittleren Punktfehlern des konventionellen (also auf die zufälligen Fehleranteile in ihrer realistischen Größenordnung bezogenen) Ausgleichungsansatzes sinnvoll.

   Gezielte, auf die Gesamtheit der zufälligen, beobachtungsbezogenen À-priori-Varianzanteile maßstäblich wirkende Änderung ihrer Größenordnung anhand des in Kapitel 6.4.1 gezeigten Faktors zur Herbeiführung des Äquivalenzfalls des daraus resultierenden durchschnittlichen mittleren Punktfehlers mit seinem auf die Wirkung der systematischen Anteile beschränkten Pendant.

Jene im Parameterraum abgeglichene Situation ist im Beobachtungsraum anhand einer Gruppe mittlerer Genauigkeiten aller beteiligten Beobachtungstypen (s_r, s_s, s_{GNSS}) beschreibbar, deren innere Struktur aufgrund der einheitlichen maßstäblichen Skalierung der ursprünglichen À-priori-Genauigkeiten der inneren Struktur deren Typenmitteln entspricht.

4. Prüfung der latenten Hauptschwachform auf Dominanz. Liegt diese wie im Sinne der natürlichen Hauptschwachform vor, unterscheiden sich die Budgets der durch zufällige und systematische Anteile indizierten Neupunktstochastiken in ihrer inneren Struktur erheblich und lassen sich nicht maßstäblich aufeinander abbilden.
5. Ermittlung der
   - Netzverzerrung
   - maximalen latenten Einzelpunktschwachform
   - maximalen effektbelasteten Einzelpunktfehler
   - durchschnittlichen Effektbelastung der konventionellen Stochastik einer Neupunktkoordinate
     + aufgrund der Netzverzerrung (Belastung in zwei- und eindimensionaler Form)
     + ausschließlich aufgrund der Varianzen, also ohne Berücksichtigung der Kovarianzen (Belastung in zwei- und eindimensionaler Form und bezogen auf den mittleren Punktfehler)

   jeweils mit und ohne die zusätzliche Modellierung der beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Anteile zur Prüfung der Dominanz der beobachtungsbezogenen stochastisch-systematischen Fehleranteile innerhalb der Gruppe der geometrisch induzierten systematischen Fehleranteile im Datum des gegebenen Lagenetzes und für realistische Größenordnungen aller betrachteten Fehleranteile.

Tab. (6.6) Verfahren und Testgrößen zur gemeinschaftlichen Prüfung der deterministisch- (∇) und stochastisch- (δ) systematischen Fehleranteile:

Art der Prüfung	Fehleranteile $\nabla + \delta$ absolut	Fehleranteile $\nabla + \delta$ relativ zu den zufälligen Anteilen ε
Quantitative Prüfung	• s_r • s_s • s_{GNSS} } Gemäß Äquivalenzfall mit ε	• Netzverzerrung • Eigenwerte des AEWP und deren Verteilung
Qualitative Prüfung	Natürliche Hauptschwachform der $\nabla + \delta$-Kovarianzmatrix gemäß des SEWP	Latente Hauptschwachform

Die qualitative Prüfung der absoluten Fehleranteile $\nabla + \delta$ anhand des SEWP ist zwar theoretisch in dieser Form möglich, jedoch veraltet und daher zweckmäßigerweise durch die aussagekräftigere und umfassendere qualitative Prüfung dieser Anteile relativ zu den zufälligen Fehleranteilenεanhand des AEWP zu ersetzen.

6.9 Zusammenfassung über die zufälligen und systematischen Fehleranteile in Lagenetzen

In der geodätischen Auswertepraxis spielten die über die zufälligen Varianzanteile hinaus gehenden aber tatsächlich vorhandenen Fehleranteile für das stochastische Modell der Beobachtungen bisher kaum eine Rolle. Folglich wurden die Genauigkeiten der Parameter – speziell der Netzkoordinaten – stets zu günstig geschätzt. In Lagenetzen handelt es sich hierbei sowohl um deterministisch- als auch um stochastisch-systematische Fehleranteile, die überwiegend durch geometrische Effekte gespeist sind. Hieraus resultieren auch Korrelationen zwischen den Messungen des jeweiligen Beobachtungstyps sowie zwischen verschiedenen Beobachtungstypen, die bisher ebenfalls vernachlässigt wurden.

Quasi-systematische Fehleranteile, die geometrische und stochastische Nichtlinearitätsverzerrungen aus dem Taylorreihenabbruch nach dem 1. Glied darstellen und als Effekte ab 2. Ordnung bezeichnet werden können, spielen aufgrund ihrer geringen Größenordnung für geodätische Belange keine Rolle.

Die Modellierung der auf systematische Fehleranteile bezogenen Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen nach Kapitel 6.3 erlaubt die Schätzung der wahren Kovarianzmatrix der Parameter und damit auch des auf diese systematischen Anteile zurückgehenden Kovarianzmatrixzuschlags, der anhand des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) als Vergleichskovarianzmatrix mit der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianzmatrix spektral zerlegt und somit analysiert werden kann. Die daraus resultierende latente Hauptschwachform stellt eine Testgröße zur qualitativen Bewertung der systematischen Fehleranteile relativ zu den zufälligen Anteilen und die resultierende Netzverzerrung eine quantitative Testgröße dafür dar. Der zur latenten Hauptschwachform gehörige Verzerrungsträger ist nicht zwingend anhand eines geometrischen Standardformelements approximierbar (DRIXLER 1993) sondern richtet sich entsprechend der konkreten Wirkung der nicht-zufälligen Fehleranteile aus.

Das Konzept nach Kapitel 6.8 analysiert die Wirkung der systematischen Fehleranteile quantitativ und qualitativ. Da die Wirkung systematischer Fehleranteile in freien (Lage-) Netzen grundsätzlich maximal ist, sollten im Interesse einer Maximalschätzung dieser Anteile die konzeptionell analysierten Prüflinge als freie Ausgleichung konzipiert werden. Dabei sollte für jene Maximalschätzungen der Netzplanungsmodus gewählt und somit von der Verarbeitung realer Netzdaten abgesehen werden, um die Ergebnisse nicht durch den Stichprobencharakter eines Realnetzes zu belasten.

Die sich aus den systematischen Fehleranteilen ergebenden latenten Schwachformen wirken auf die Geometrie und die Stochastik des Netzes in gleicher Weise verzerrend; so sind Neupunkte maximal ungünstiger Stochastik auch potenziell mit maximalen geometrischen Verzerrungseffekten belastet.

Insbesondere bei Polygonzügen bzw. Polygonzugschleifen ist häufig die Mächtigkeit der latenten Hauptschwachform mit über 50 % der Netzverzerrung dominant und repräsentiert so die gesamte, mit

dem Effekt der systematischen Fehleranteile belastete Stochastik der Neupunkte ausreichend nach Betrag und Richtung. In solchen Fällen, die darüber hinaus an einem steilen Verlauf des Spektrums der Eigenwerte des AEWP erkennbar sind, unterscheidet sich die anhand zufälliger von der anhand systematischer Anteile induzierte Neupunktstochastik in ihrer inneren Struktur klar, so dass sich die zugehörigen Kovarianzmatrizen der Parameter nicht maßstäblich aufeinander abbilden lassen.
Als Ursache dafür kommt neben langwellig wirkenden und netzbeherrschenden Fehlereinflüssen sowie Korrelationen im Beobachtungsmaterial noch das Netzdesign in Betracht. Es treten dabei oft Korrelationen zwischen den Netzpunkten auf, die darüber hinaus dann eine deutlich unterschiedliche stochastische Belastung aufweisen.

Die zur Herabsetzung der Wirkung der nicht-zufälligen Fehleranteile in Lagenetzen aufgestellten Optimierungskriterien gehören zu den Grundsätzen der theoretischen und praktischen Geodäsie und dienen vor allem der Verringerung der durch diese Fehleranteile induzierten Korrelationen im Beobachtungsraum.

Unter Beachtung des Netzdesigns 0. Ordnung lässt sich die Wirkung systematischer Anteile durch Einführung zusätzlicher Stützpunkte als Anschlusspunkte reduzieren; diese Reduktion verstärkt sich, falls für die Anschlusspunkte die möglichen Knotenpunkte der natürlichen Hauptschwachform des frei ausgeglichenen Lagenetzes gewählt werden. Dabei steigt Belastbarkeit und stochastische Sicherheit der Knotenpunkteigenschaft mit der Mächtigkeit der natürlichen Hauptschwachform.

Mögliche Netzspannungen zwischen den Beobachtungen und den Anschlusspunktkoordinaten führen zu einer geometrischen und stochastischen Netzverzerrung sowohl für die konventionelle als auch für die mit stochastisch-systematischen Fehleranteilen belastete Situation; Knotenpunkteigenschaften der Anschlusspunkte verhalten sich zu diesen durch Netzspannungen ausgelösten Verzerrungseffekten der konventionell oder anhand des strengen stochastischen Modells der Beobachtungen ausgeglichenen Lagenetze weitgehend neutral.

In den untersuchten Beispielen trat innerhalb der Gruppe der geometrisch induzierten systematischen Fehleranteile stets eine Dominanz der Wirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer gegenüber der Wirkung beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehleranteile auf, realistische Größenordnungen aller betrachteten Fehleranteile vorausgesetzt. Im Falle einer begrenzten Anzahl aber signifikanten Größenordnung deterministisch-systematischer Fehleranteile in einem Netz wird deren geometrische und stochastische Wirkung auf die Netzpunkte unmittelbar erkennbar.

Die hier vorgenommenen Untersuchungen zu den verschiedenen Induktionswirkungen im langwellig belasteten Landesnetz *Rheingrenze* waren zur vollständigen Erklärung dessen Schwachformen leider nicht geeignet; hier besteht daher noch Forschungsbedarf bezüglich weiterer beobachtungsbezogener nicht-zufälliger und systematisch wirkender Fehleranteile.

6.9 Zusammenfassung über die zufälligen und systematischen Fehleranteile in Lagenetzen

7 Zusammenfassung und Fazit

In geodätischen Ortungsaufgaben und Netzlösungen erfolgt die Bestimmung der gesuchten Parameter – wie der besonders interessierenden Netzkoordinaten – erwartungstreu, falls ausschließlich zufällige beobachtungsbezogene Varianzanteile und ein fehlerfreies Modell zur Abbildung der Beobachtungen auf diese Parameter vorliegen. Das Auftreten nicht-zufälliger Fehleranteile in den Netzbeobachtungen oder den festen Anschlusskoordinaten führt ebenso wie ein nicht fehlerfreies Abbildungsmodell zu einer nicht mehr erwartungstreuen Schätzung mit geometrischen und stochastischen Netzverzerrungen wie einer gegenüber dem unverzerrten Fall ungünstigeren Parameterstochastik.

Als Ursache jener Verzerrungseffekte kommen im geometrischen Nivellement neben deterministisch-systematischen Fehlern der verwendeten Anschlusspunkthöhen sowie möglichen Vernachlässigungen in deren stochastischen Modell, wie der Durchführung einer hierarchischen anstelle einer dynamischen Ausgleichung, noch die beobachtungsbezogenen, maßgeblich über die Veränderlichkeit des vertikalen Temperaturgradienten physikalisch induzierten stochastisch-systematischen Fehleranteile nach FAWAZ (1981) bzw. deterministisch-systematischen Fehleranteilen nach JÄGER (1990) in Betracht, durch die darüber hinaus auch Korrelationen zwischen den als Netzbeobachtungen eingeführten geometrischen Standpunkthöhenunterschieden und somit Kovarianzanteile verursacht werden.
In geodätischen Lagenetzen können über vergleichbare Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Anschlusspunkte hinaus Fehler im Abbildungsmodell der Beobachtungen auf die Parameter sowie beobachtungsbezogene, hauptsächlich geometrisch induzierte stochastisch-systematische Fehleranteile (z.B. Zentrierfehler) und deterministisch-systematische Fehleranteile (z.B. falsche Additionskonstante) für jene Verzerrungseffekte ursächlich sein. Beide systematischen Fehlertypen verursachen neben den zusätzlichen Varianzanteilen auch in Lagenetzen zwingend Kovarianzanteile im stochastischen Modell der Beobachtungen.

Dabei wirken in Lagenetzen stets Fehler jenes Abbildungsmodells aufgrund dessen Nichtlinearität und der damit erforderlichen Linearisierung als geometrische und stochastische Nichtlinearitätsverzerrung:

Geodätische Ortungsaufgaben oder Parameterschätzungen mit nichtlinearen Parametrisierungen der Beobachtungen induzieren linearisierungsbedingt systematisch und stochastisch wirkende Anteile höherer Ordnung für den hier ausschließlich betrachteten nicht überbestimmten Fall. In der Geodäsie resultieren diese Anteile aus dem Abbruch der Taylorreihenentwicklung der Abbildungsfunktionen nach dem ersten Reihenglied und belasten die geometrische Lösung in Form eines Parameterbias höherer Ordnung und die Parameterstochastik als zugehörige Zuschlagsmatrix der konventionellen, also auf die 1. Ordnung beschränkten Kovarianzmatrix der Parameter. Als größter Anteil höherer Ordnung sei hier der Parameterbias 2. Ordnung und die zugehörige Zuschlagsmatrix für skalare und vektorwertige Beobachtungen und Funktionen aufgestellt und mit den einschlägigen bisherigen Entwicklungen nach TEUNISSEN (1989) und GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) verglichen. Dabei

konnten einige Darstellungen der geometrischen und stochastischen Nichtlinearitätsverzerrung der Quelle GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) falsifiziert werden.
Beide Nichtlinearitätsverzerrungen sind mit den À-priori-Genauigkeiten der Netzbeobachtungen und mit der Größe des Netzes positiv korreliert, beschränken sich jedoch auf den Sub-Millimeterbereich für 20 im Abstand von jeweils 1000 m aufeinanderfolgende Neupunkte im einseitig angeschlossenen Polygonzug und sind so aufgrund ihrer geringen Größenordnung für geodätische Belange nicht von Bedeutung. Dies gilt ausweislich einer hier gezeigten modellierten Restgliedschätzung auch für die Summe der Anteile aller höheren Ordnungen. In jenem Beispiel wirken die Anteile beider Ordnungen orthogonal zueinander. Für die Belange ingenieurwissenschaftlich-technischer Anwendungen wie der Nanotechnologie können nach MEKID & VAJA (2007) aber die Nichtlinearitätsverzerrungen der Terme höherer Ordnung bis zu 0.5 % der zugehörigen konventionellen Größen betragen und so die Relevanzgrenze überschreiten. Aufgrund ihrer linearisierungsbedingten Induktion lassen sich Anteile höherer Ordnung auch als *quasi-systematisch* bezeichnen.

Sowohl für Nivellement- als auch für Lagenetze stellen die beobachtungsbezogenen stochastisch- und die beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteile formal Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen dar, die sich aber nicht auf zusätzliche Varianzanteile beschränken sondern darüber hinaus Kovarianzen zwischen den Netzbeobachtungen implizieren.

Für Nivellementnetze wurden im Rahmen dieser Arbeit erstmals Schätzungen für Parameter und deren Stochastik mit Anwendung des kumulativ nach FAWAZ (1981) und nach JÄGER (1990) aufzusetzenden strengen stochastischen Modells der Beobachtungen durchgeführt. Für Lagenetze wurde hier über jene erstmaligen Schätzungen hinaus vorbereitend das strenge stochastische Modell der Beobachtungen auf Basis der beobachtungsbezogenen nicht-zufälligen Fehleranteile erstmalig aufgestellt.

Die verschiedenen, meistens beobachtungsbezogenen nicht-zufälligen Fehleranteile lassen sich in den Parameterraum abbilden und stellen dort auf die gesuchten Zielgrößen wirkende Störparameter als ein parameterbezogener Bias (Parameterbias) dar, deren stochastische Verzerrungswirkung sich im Falle deterministisch-systematischer Fehleranteile unmittelbar aus deren quadratischer Form als dyadisches Produkt und für stochastisch-systematische Fehleranteile aus der Abbildung des zugehörigen beobachtungsbezogenen Kovarianzmatrixzuschlags in den Parameterraum jeweils als Zuschlagsmatrix für die konventionelle, sich nur aus zufälligen Varianzanteilen speisende Kovarianzmatrix der Parameter ergibt.

Die Anwendung des allgemeinen Eigenwertproblems (AEWP) auf jene parameterbezogene Zuschlagsmatrix als Vergleichskovarianzmatrix und mit der konventionellen Kovarianzmatrix der Parameter als Referenzkovarianzmatrix im Rahmen des spektralen Analysekonzepts erlaubt die spektrale Zerlegung der Zuschlagsmatrix unter Bezugnahme auf die Referenzkovarianzmatrix, erzeugt neben den AEWP-

Eigenwerten auch die zugehörigen Eigenvektoren und wurde hier für geodätische Kovarianzmatrizen in dieser Form erstmalig angewandt.

Dabei lässt eine ausgeprägte Steilheit des Spektrums der nach fallender Größe sortierten Eigenwerte aus dem AEWP auf Unterschiede zwischen den inneren Strukturen der konventionellen und der sich ausschließlich infolge nicht-zufälliger Fehleranteile ergebenden Parameterstochastik schließen.
Die Summe aller Eigenwerte aus dem AEWP bildet die stochastische quadratische Netzverzerrung nach BAARDA (1973), FÖRSTNER (1979) und JÄGER et al. (2005) und stellt die zentrale Testgröße für die Quantifizierung des Verzerrungseffekts dar. Die dimensionslose Netzverzerrung ist neben der Stärke des Effekts noch mit der Anzahl der Beobachtungen und Parameter also der Netzgröße positiv korreliert und ist so für Vergleichszwecke verschiedener Verzerrungseffekte in der hier entwickelten, auf den einzelnen Parameter bzw. die einzelne Neupunktkoordinate bezogenen Form aussagefähiger. Im Gegensatz zum Bezug der Netzverzerrung auf die vollständige konventionelle und die vollständige aus nicht-zufälligen Fehleranteilen induzierte Neupunktstochastik erfolgt hier begleitend zusätzlich die Einführung einer globalen Größe für die Quantifizierung der relativen stochastischen Effektbelastung einer Neupunktkoordinate ausschließlich auf der Basis der konventionellen und der auf die Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile beschränkten Varianzen der Neupunkte.

Die sich aus der transponierten Inversen der originalen Modalmatrix des AEWP ergebenden und auf diese Weise umgeformten Eigenvektoren bilden mit den zugehörigen Eigenwerten die sog. latenten Schwachformen als qualitatives (Netz-) Verzerrungsmerkmal, welche die Trägerfunktionen für die Verzerrung der Geometrie des Netzes darstellen und im Falle des geometrischen Nivellements dem topografischen Geländeprofil folgen. In Lagenetzen lassen sich die geometrischen Verzerrungseffekte weder in einer vergleichbar kompakten Form noch als geometrische Standardformelemente angeben. Vielmehr richten sich die Verzerrungsträger entsprechend der konkreten Wirkung der nicht-zufälligen Fehleranteile individualisiert aus.

Die zum größten Eigenwert gehörige Schwachform repräsentiert als latente Hauptschwachform den geometrischen Netzverzerrungseffekt ausreichend, falls der zugehörige Eigenwert mit einem Anteil von über 50 % an der Summe aller Eigenwerte die Netzverzerrung dominiert oder die mit dem Anteil des Eigenwertes einhergehende Mächtigkeit der Hauptschwachform ein Vielfaches der Mächtigkeit der nächst niedrigeren (latenten) Schwachform beträgt.
Die sich aus den systematischen Fehleranteilen ergebenden latenten Schwachformen wirken auf die Geometrie und die Stochastik des Netzes in gleicher Weise verzerrend; so sind Neupunkte maximal ungünstiger Stochastik auch potenziell mit maximalen geometrischen Verzerrungseffekten belastet.

Zur qualitativen und quantitativen Analyse der geometrischen und stochastischen Verzerrungswirkung nicht-zufälliger Fehleranteile in Nivellement- und Lagenetzen ließ sich mit Anwendung der spektralen Zerlegung einer Vergleichs- in Bezug auf eine Referenzkovarianzmatrix das folgende Konzept finden.

Da die Wirkung systematischer Fehleranteile in freien Netzen grundsätzlich maximal ist, sollten im Interesse einer Maximalschätzung dieser nicht-zufälligen Fehleranteile die konzeptionell analysierten Prüflinge als freie Ausgleichung konzipiert werden, sofern dies möglich ist:

- Anwendung des Netzplanungsmodus zur Erzielung stichprobenunabhängiger und so nicht durch eine diskrete Realnetzsituation belasteter Ergebnisse.
- Freie Ausgleichung des Netzprüflings zur Ermittlung der Orte des optimalen geodätischen Datums als Knotenpunkte der natürlichen Hauptschwachform gemäß der Anwendung des speziellen EWP auf die konventionelle Kovarianzmatrix der Parameter.
- Prüfung der natürlichen Hauptschwachform im zuvor erklärten Sinne auf Dominanz.
- Ermittlung des durchschnittlichen konventionellen mittleren Höhen- bzw. Punktfehlers mit den zufälligen beobachtungsbezogenen À-priori-Varianzanteilen in ihrer realistischen Größe.
- Ermittlung des durchschnittlichen, ausschließlich mit dem Effekt der systematischen Fehleranteile belasteten mittleren Höhen- bzw. Punktfehlers mit ausschließlich nicht-zufälligen, also systematischen Fehleranteilen im stochastischen Modell der Beobachtungen (Nullsetzung der zufälligen beobachtungsbezogenen À-priori-Varianzanteile).
- Gezielte, auf die Gesamtheit der zufälligen, beobachtungsbezogenen À-priori-Varianzanteile maßstäblich wirkende Änderung ihrer Größenordnung zur Herbeiführung des Äquivalenzfalls des daraus resultierenden durchschnittlichen konventionellen mittleren Höhen- bzw. Punktfehlers mit seinem auf die Wirkung der systematischen Anteile beschränkten Pendant, um die stochastische Wirkung der nicht-zufälligen Fehleranteile auf die Parameter über die zufälligen beobachtungsbezogenen Varianzanteile und so mit Hilfe der konventionellen Beobachtungsstochastik geeignet darzustellen.
- Jene im Parameterraum abgeglichene Situation ist im Beobachtungsraum für Nivellementnetzeanhand der mittleren Beobachtungsgenauigkeit $\sigma_{\Delta h}$, des mittleren Kilometerfehlers σ_{1km} und des mittleren Kilometerfehlers pro 1 Gon Neigung $\sigma_{1km/gon}$ beschreibbar.

  Für Lagenetze lässt sich eine Gruppe mittlerer Genauigkeiten aller beteiligten Beobachtungstypen (s_r, s_s, s_{GNSS}) zur Beschreibung des Äquivalenzfalls finden und angeben.

  Es handelt sich somit für beide Netzarten um globale quantitative Testgrößen für die Wirkung der systematischen Fehleranteile auf die Parameter als bisher nur für zufällige Varianzanteile gebräuchliche und beobachtungsbezogene genauigkeitsanzeigende Größen.
- Prüfung der latenten Hauptschwachform im zuvor genannten Sinne auf Dominanz.
- Ermittlung von Netzverzerrung, maximaler latenter Einzelpunktschwachform und größtem effektbelasteten Einzelhöhen- bzw. Punktfehler im Datum des gegebenen Nivellement- bzw. Lagenetzes, jeweils mit und ohne die zusätzliche Modellierung der beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Anteile und für realistische Größenordnungen aller beteiligten Varianz- und Fehleranteile.

Eine konzeptionelle Analyse von Nivellement- und Lagenetzen jeweils unterschiedlichen Designs führt über die daraus gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile auf Optimierungskriterien für deren Herabsetzung. Aufgrund der sich für beide Netzarten jedoch sehr deutlich unterscheidenden Wirkungsweisen jener Fehleranteile gelten einige Optimierungskriterien netzspezifisch. So lässt sich die Wirkung nicht-zufälliger Fehleranteile in Nivellementnetzen primär über eine Verkleinerung der Lattenabstände, eine Verringerung der Gefälle in den Standpunkthöhenunterschieden, eine Vergrößerung des absoluten zeitlichen Abstandes der Messungen sowie die Einhaltung bestimmter tageszyklischer Zeitabstände reduzieren. Für Lagenetze lassen sich hingegen die Kalibrierung und ggf. Justierung der verwendeten EDM-Komponenten und der verwendeten optischen Lote sowie wiederholende Messungen derselben EDM-Strecke unter verschiedenen meteorologischen Bedingungen und mit verschiedenen EDM-Komponenten als Optimierungskriterien finden. Für beide Netzarten gelten gemeinsam die Optimierungskriterien der Einführung zusätzlicher Stützpunkte als Anschlusspunkte, der Knotenpunkteigenschaften dieser Anschlusspunkte (bezogen auf die natürliche Hauptschwachform des frei ausgeglichenen Netzes) sowie der Vermeidung geometrischen Zwangs zwischen den Netzmessungen und den Festpunkten durch zuverlässige und genaue Messungen und kontrollierte Anschlusskoordinaten.

Das Beispiel der sog. Testschleife Koblenz (KUNTZ & SCHMITT 1985) ist aufgrund der auftretenden Geländeneigungen, des zeitlichen Verhaltens der Beobachtungen und des Netzdesigns zur Induktion nicht-zufälliger Fehleranteile im geometrischen Nivellement sehr gut geeignet und weist ausschließlich sich aus dem Effekt der nicht-zufälligen Fehleranteile speisende mittlere Höhenfehler in der etwa achtfachen Größenordnung der konventionellen, also ausschließlich durch zufällige Varianzanteile induzierten mittleren Höhenfehler auf.

Innerhalb der Gruppe der hier untersuchten Lagenetze erreicht das *Freinetz Rethebrücke* mit 71.6 % die maximale über beobachtungsbezogene stochastisch-systematische Fehleranteile (meteorologische Reduktion der EDM-Stecken und Zentrierfehler) induzierte Belastung des mittleren Punktfehlers.

Unter den Voraussetzungen realistischer Größenordnungen aller betrachteten Fehleranteile trat in den untersuchten Beispielen für Nivellement- bzw. Lagenetze innerhalb der Gruppe der physikalisch bzw. geometrisch induzierten nicht-zufälligen Fehleranteile in allen Fällen eine Dominanz der Wirkung beobachtungsbezogener stochastisch-systematischer gegenüber der Wirkung beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehleranteile auf die Parameter auf. Die Wirkung der deterministisch-systematischen Anteile ist daher in den meisten Fällen vernachlässigbar gering.

Auf Grundlage des vorgelegten und für Nivellement- und Lagenetze einheitlichen Konzepts besteht nun die Möglichkeit einer qualitativen und quantitativen Analyse der Verzerrung beider Netzarten infolge teilweise erstmalig modellierter unterschiedlicher systematischer und stochastischer Modellfehler, deren resultierendes Verständnis auch für die Optimierung geodätischer Netze relevant ist.

Anhänge

A.2.1 Spektrale Optimierungskriterien für die Stochastik geodätischer Netze

Nach NAVRATIL (2006) existieren mehrere auf der spektralen Analyse basierende Methoden zur Optimierung der Stochastik geodätischer Netze mit folgenden Optimierungskriterien:

- A-Optimalität: $sp(\boldsymbol{C_{xx}}) \rightarrow Min.$
  Minimale Spur von $\boldsymbol{C_{xx}}$. Aufgrund der Identität der Spur mit der Summe der Eigenwerte aus dem speziellen Eigenwertproblem (SEWP) kann für die A-Optimalität auch die minimale Summe dieser Eigenwerte gefordert werden: $\sum_1^u \lambda_i \rightarrow Min.$
  Die A-Optimalität wird als klassische Optimierungsmethode für die (Neupunkt-) Stochastik geodätischer Netze (*Gesamtspurminimierung*) angesehen und dient der generellen Minimierung der Netzstochastik ohne besondere Randbedingungen.
- D-Optimalität: $det(\boldsymbol{\Lambda_{C_{xx}}}) \rightarrow Min.$
  Minimale Determinante der auf die von Null verschiedenen Eigenwerte reduzierten Spektralmatrix des SEWP von $\boldsymbol{C_{xx}}$. Da die Determinante einer quadratischen Matrix auch ihr Volumen angibt und alle Spaltenvektoren einer Spektralmatrix zueinander orthogonal und nur mit einem Eintrag ungleich Null – dem jeweiligen Eigenwert – besetzt sind, lässt sich geometrisch die Forderung der D-Optimalität auch als minimales Produkt aller von Null verschiedenen Eigenwerte von $\boldsymbol{C_{xx}}$ interpretieren: $\lambda_1 * \lambda_2 * \ldots * \lambda_u \rightarrow Min.$
- E-Optimalität: $\lambda_{max} \rightarrow Min.$
  Minimierung des größten Eigenwertes λ_{max} des SEWP von $\boldsymbol{C_{xx}}$.
- S-Optimalität: $\lambda_{max} - \lambda_{min} \rightarrow Min.$
  Minimierung der Differenz zwischen größtem und kleinstem Eigenwert des SEWP von $\boldsymbol{C_{xx}}$. Diese Methode wird angewendet, falls vorrangig eine homogene Neupunktstochastik – mit geringen Kovarianzen – angestrebt wird.

Die Wahl eines speziellen Optimierungskriteriums zur Anwendung in einem geodätischen Netz hängt von der Optimierungsstrategie ab, welche für das Netz vorgesehen ist. Ohne spezielle Vorgaben findet hierfür im Allgemeinen die A-Optimalität zur Herabsetzung der globalen Netzstochastik Anwendung. Die E- Optimalität kommt hingegen zum Zuge, wenn ein Interesse an der Einhaltung einer Obergrenze der Parameterstochastik besteht. Für eine weitgehende Homogenisierung der Parameterstochastik ist die S-Optimalität vorgesehen.

A.2.2 Stochastische Netzoptimierung durch Datums- und Stützpunkte nach spektralen Kriterien

A.2.2.1 Grundsätzliches und Zielsetzung

GNSS-gestützte Verfahren haben sich für die Einzelpunktbestimmung auch innerhalb geodätischer Netze etabliert.

Leitfrage ist hier die Optimalverteilung einer vorgegebenen Anzahl von (präzisen und meist GNSS-gestützten) Anschluss- bzw. Datumspunkten in einem geodätischen Netz zur globalen Verbesserung der Netzstochastik mit Herabsetzung des mittleren Punktfehlers – im Falle eines freien Netzes mit gleichzeitiger Datumsfestlegung.
Die hier nach JÄGER & DRIXLER (1989) angewendete Optimierungsmethode für die Verteilung jener Stützpunkte beruht auf dem Konzept der spektralen Netzanalyse (JÄGER 1988, WIESER 1988) und der spektralen Optimierung geodätischer Netze (JÄGER 1988). Die Verbesserung der Netzstochastik soll dabei über eine maximale Schrumpfung des Eigenwertspektrums der Kovarianzmatrix der Netzkoordinaten gemäß A-Optimalität (NAVRATIL 2006) als maßgebliche spektrale Zielfunktion erreicht werden.
Damit gehen die bestmögliche Homogenisierung der Fehlersituation des Netzes sowie dessen größtmögliche geometrische Stabilität und Aussteifung und die Herabsetzung der Korrelationen der Netzpunkte einher. Durch die Umsetzung dieser Zielfunktion werden ferner die infolge nicht vorhandener oder nicht optimal verteilter Anschluss- oder Datumspunkte hervorgerufenen sog. *Schwachformen*, welche nach BILL et al. (1984) zu Verformungen des Netzes führen können, weitgehend beschränkt und geodätische Kontrollnetze hinsichtlich des Auftretens langwelliger – und damit durch statistische Testverfahren nur schwierig aufdeckbarer – Deformationen im Netzbereich maximal sensibilisiert (NIEMEIER 1982, SCHMITT et al. 1989).

A.2.2.2 Optimierungstheorie

Grundlage dieser Optimierungstheorie ist die spektrale Zerlegung der Kovarianzmatrix der Netzkoordinaten anhand des speziellen Eigenwertproblems in ihre Eigenwerte μ mit absteigender Wertigkeit $(\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_i > \mu_{i+1} > \cdots \mu_u,\ u = \text{Anzahl Koordinaten})$ und zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$, welche gemeinsam die natürlichen Schwachformen des geodätischen Netzes bilden. Dabei ist dem größten Eigenwert μ_1 die sog. *Hauptschwachform* zugeordnet, die insbesondere bei langgestreckten oder Nivellementnetzen deren Fehlerhaushalt dominiert und langwellig wirkende Verzerrungen des Netzes – infolge systematischer oder grober Fehler – abbildet.
Jede Schwachform gibt eine Netzverformung wieder und weist eine geometrische und eine stochastische Eigenschaft auf, die miteinander korrespondieren. Die geometrische Eigenschaft stellt im einzelnen Netzpunkt den Unterschied zwischen der wahren und der (nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate) geschätzten Netzform dar, dessen Größe sich proportional zur Varianz dieses Netzpunktes

– als stochastische Eigenschaft der Schwachform – verhält. Diese Varianz wirkt jedoch nicht zweiseitig sondern vektoriell in Richtung der Ablage zwischen wahrer und geschätzter Netzpunktposition.

Für die Umsetzung der Leitfrage nach Optimierung der Netzstochastik durch maximale Schrumpfung des Eigenwertspektrums der Kovarianzmatrix der Netzkoordinaten sei zunächst die Ungleichung nach GANTMACHER & KREIN (1960)

$$\mu_i^{(-)} > \mu_i^{(M)} \geq \mu_{i^{+M}}^{(-)} \tag{A.2.2.1}$$

mit dem Status

$(-)$ = ohne oder mit beliebig gegebenen Anschlusspunkten
(M) = jeweils nach Einführung von M zusätzlichen festen Einzelkoordinaten

betrachtet. Die Indizierung i^{+M} zeigt an, dass generell ein höherer Index als i vorliegt, der nicht mit $i + M$ identisch sein muss und für den

$$i^{+M} \geq i + M \tag{A.2.2.2}$$

gilt.
Aus (A.2.2.1) ist ein Optimierungsfall für die Verbesserung der Netzstochastik nach GANTMACHER & KREIN (1960) für

$$\mu_i^{(M)} = \mu_{i^{+M}}^{(-)} \tag{A.2.2.3}$$

entnehmbar, also nach Einführung von M zusätzlichen festen Einzelkoordinaten (Stützkoordinaten), welche sich genau auf die

$$\frac{M}{d} \tag{A.2.2.4}$$

mit

d = Netzdimension (z.B. $d = 2$ für Lagenetze)

Knotenpunkte als quasi-fehlerfreie Netzpunkte in der betrachteten i-ten Eigen- bzw. Schwachform x_i beziehen müssen. Insbesondere in Höhennetzen können quasi-fehlerfreie geometrische Orte in einer Schwachform auch als Knotenlinien auftreten, die wiederum anhand der ihnen entlang liegenden (Knoten-) Punkte zu realisieren sind. Knotenlinien und -punkte wachsen in Länge und Anzahl tendenziell mit dem Index des Eigenwertes ihrer zugehörigen Schwachform, also mit abnehmenden Eigenwertbeträgen (JÄGER 1990). Im selben Zuge reduziert sich jedoch deren stochastische Belastbarkeit.
Für den Fall einer willkürlichen, also nicht zwingend an die Knotenpunkte gebundenen Verteilung der zusätzlichen Stützkoordinaten erreicht $\mu_i^{(M)}$ nicht seinen optimal kleinen Wert und es gilt dann

$$\mu_i^{(M)} > \mu_{i+M}^{(-)} \tag{A.2.2.5}$$

Ein Realisierungsbeispiel dafür ist die gleichmäßige und damit Knotenpunkt-unabhängige Verteilung von M Stützkoordinaten als direkte Höhenbeobachtungen in einem Nivellementnetz mit insgesamt n Netzpunkten. Hier tritt ohne Optimierungssituation bereits eine Halbierung des größten Eigenwertes $\mu_{max} = \mu_1$ auf, wenn nach JÄGER (1990) die einzelne Stützkoordinate eine Varianz aufweist von

$$\sigma^2 = \mu_{max} * \frac{M^2}{n^2} \tag{A.2.2.6}$$

Im Optimierungsfalle hingegen nehmen die durch die neuen Eigenformen $x_i^{(M)}$ darstellbaren neuen Schwachformen minimal zu erwartende Größen in ihren geometrischen und stochastischen Eigenschaften an und geben außerdem eine optimal homogenisierte Fehlersituation des Netzes wieder, da nach der Optimierung die ursprünglichen ersten M Schwachformen nicht mehr auftreten und grundsätzlich im Eigenwertspektrum die Eigenwerte höherer Indizes kleinere Abstände zueinander aufweisen als die Eigenwerte niedrigerer Indizes. So gilt in diesem Falle für die resultierenden neuen Schwachformen nach GANTMACHER & KREIN (1960)

$$x_i^{(M)} = x_{i+M}^{(-)} \tag{A.2.2.7}$$

Diese neuen Schwachformen höherer Ordnung weisen nach BORRE (1987) und JÄGER (1988) allgemein kürzere Wellenlängen als die alten Schwachformen niedrigerer Ordnung auf und tragen so zur optimalen lokalen Stabilisierung der Netzgeometrie bei. Mit der Dämpfung und Ausfilterung jener alten Schwachformen werden durch systematische Fehler verursachte globale Korrelationen in den Beobachtungen eliminiert, die hauptsächlich in den langwelligen Fehlertermen der Schwachformen niedrigerer Ordnung wirken.

A.2.2.3 Optimale Datumsfestlegung freier geodätischer Netze

Die Datumsfestlegung eines freien geodätischen Netzes ist ein das Netzdesign 0. Ordnung betreffendes Problem, welches die Frage nach der optimalen Verteilung der Datumspunkte aufwirft und dessen Lösung sich in der vorstehenden Optimierungstheorie findet (JÄGER 1989).

Danach ergeben sich mit

r = Datumsdefekt des freien Netzes (rigid body movement, z.B. $r = 1$ für Höhennetze)
d = Netzdimension (z.B. $d = 1$ für Höhennetze)

die optimalen Datumspunkte als

$$\frac{r}{d} \tag{A.2.2.8}$$

Knotenpunkte der konkreten Eigenfunktionen bzw. Schwachformen x_i, welche genau diese Anzahl von Knotenpunkten aufweisen. Aus dieser Art der Datumsfestlegung resultiert die Pseudoinverse $\boldsymbol{N}^+$ kleinster Spur als innere Fehlermatrix (MEISSL 1969) der bestmöglichen Netzgenauigkeit ebenso wie aus der Gesamtspurminimierung des freien Netzes. Die bestmögliche Fehlersituation eines freien Netzes kann daher äquivalent sowohl anhand einer Helmerttransformation des frei ausgeglichenen Netzes über alle Netzpunkte – mit ihren (Näherungs-) Koordinaten im Zieldatum – als auch anhand einer Zwangsausgleichung mit den Knotenpunkten als optimale Datums- bzw. Anschlusspunkte herbei geführt werden. Die durch die alternative praktische Anwendung beider Möglichkeiten in der Regel verbleibenden Unterschiede in der Stochastik des festgelegten Netzes zulasten des Ergebnisses der Zwangsausgleichung beruhen auf der theoretischen Notwendigkeit varianzfreier Anschlusspunkte, die in der Praxis in Strenge kaum realisierbar ist.

A.2.2.4 Optimale Positionen für zusätzliche Stützpunkte referenzierter Netze

Die optimale Verteilung von zusätzlichen Stützpunkten für ein bereits referenziertes, also in seinem geodätischen Datum festgelegtes Netz ist ein das Netzdesign 1. Ordnung betreffendes Problem, dessen Lösung sich ebenfalls in der vorstehenden Optimierungstheorie findet (JÄGER 1989).

Diese zusätzlichen, über die eindeutige Datumsfestlegung hinausgehenden Stützpunkte entsprechen dabei wiederum den Knotenpunkten der natürlichen Schwachformen des Netzes. Abhängig von der Anzahl der vorgegebenen zusätzlichen Stützpunkte ist dafür eine Schwachform ausreichend hoher Ordnung zu betrachten, welche die tendenziell mit der Ordnung wachsende, ausreichende Anzahl von Knotenpunkten zur Verwendung als Stützpunkte enthält.

Die Einbindung zusätzlicher Stützpunkte in den Knotenpunkten eines bestehenden Netzes bewahrt dessen Geometrie und verbessert unter der Voraussetzung, dass diese Stützpunkte varianzfrei oder von besserer Genauigkeit als die Netzbeobachtungen sind, die globale Netzstochastik.

A.2.3 Äquivalenz des symmetrischen Matrizenprodukts $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ mit der Form $\boldsymbol{sp}\{\boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}\}$

Die folgende Beweisführung erfolgt analytisch jeweils für die allgemeinen Fälle einer ersten, i-ten und letzten (u-ten) Vektor- bzw. Matrixkomponente.

Zunächst sei dazu das erste Teilprodukt $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}}$ aus $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ mit

$$\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} = (u_1 \quad \cdots \quad u_i \quad \cdots \quad u_u) \text{ und } \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1u} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{u1} & \cdots & c_{ui} & \cdots & c_{uu} \end{vmatrix}$$

aufgelöst:

$$\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} = (u_1 \quad \cdots \quad u_i \quad \cdots \quad u_u) * \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1u} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{u1} & \cdots & c_{ui} & \cdots & c_{uu} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{u} u_j * c_{j1} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{ji} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{ju} \right)$$

Das symmetrische Matrizenprodukt $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ ergibt sich somit zu

$$\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}} = \left(\sum_{j=1}^{u} u_j * c_{j1} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{ji} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{ju} \right) * \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_u \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{u} \left(u_k * \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{jk} \right)$$

Mit

$$\boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}} = \boldsymbol{\nabla u_{stoch}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}^T} = \begin{vmatrix} u_1 * u_1 & \cdots & u_1 * u_i & \cdots & u_1 * u_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_i * u_1 & \cdots & u_i * u_i & \cdots & u_i * u_u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_u * u_1 & \cdots & u_u * u_i & \cdots & u_u * u_u \end{vmatrix}$$

ergibt sich für die hier ausschließlich interessierenden Hauptdiagonalenelemente

$$diag\left(\boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}\right) =$$

$$= diag\left(\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1u} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{u1} & \cdots & c_{ui} & \cdots & c_{uu} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_1 * u_1 & \cdots & u_1 * u_i & \cdots & u_1 * u_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_i * u_1 & \cdots & u_i * u_i & \cdots & u_i * u_u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_u * u_1 & \cdots & u_u * u_i & \cdots & u_u * u_u \end{vmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{u} c_{1j} * u_j * u_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{u} c_{ij} * u_j * u_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{u} c_{uj} * u_j * u_u \end{pmatrix}$$

und schließlich als deren Summe für die gesuchte Spur

$$\boldsymbol{sp}\{\boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}\} = \sum_{k=1}^{u}\left(u_k * \sum_{j=1}^{u} u_j * c_{kj}\right)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich formal nur in der Indizierung der Elemente c aus der Matrix $\boldsymbol{C_{uu}^{-1}}$ und ist somit aufgrund der Symmetrie von $\boldsymbol{C_{uu}^{-1}}$ mit dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{\nabla u_{stoch}^{T}} * \boldsymbol{C_{uu}^{-1}} * \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ identisch.

A.5.1 Erwartungswerte der univariaten Normalverteilung bis 4. Ordnung

A.5.1.1 Dichtefunktion der Normalverteilung und n-tes gewöhnliches Moment

Sei y eine stetige normalverteilte Zufallsvariable des Mittelwerts μ und der Varianz $\sigma^2\left(y \sim N(\mu, \sigma^2)\right)$, so gilt für sie die Dichtefunktion (BRONSTEIN & SEMENDJAJEW 1983)

$$p(y) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{A.5.1.1a}$$

Für den Spezialfall der stetigen standardnormalverteilten Zufallsvariable $x \sim N(0,1)$ gilt entsprechend

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * x^2} \tag{A.5.1.1b}$$

Die zugehörige Stammfunktion stellt über das Intervall $[-\infty; \infty]$ jeweils ein sicheres Ereignis dar, so dass das Integral einer Dichte über den gesamten Ergebnisraum immer den Wert 1 annimmt:

Für die Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariablen y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = 1$$

Für die Dichtefunktion der standardnormalverteilten Zufallsvariablen x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * x^2} dx = 1$$

Für den Erwartungswert der univariat normalverteilten stetigen Zufallsvariable y als gewöhnliches Moment der Ordnung n bezüglich des Mittelwerts μ und der Standardabweichung σ gilt mit der Dichtefunktion $p(y)$ aus (A.5.1.1a)

$$E\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^n\right\} = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^n * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^n * p(y)dy \tag{A.5.1.2}$$

A.5.1.2 Erwartungswert 1. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y

Für die 1. Ordnung gilt mit $n = 1$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x somit der Ansatz

$$E\{x\} = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x * e^{-\frac{1}{2} * x^2} dx$$

Dieses Integral lässt sich elementar anhand der partiellen Integration

$$\int f'(x) * g(x)dx \ = f(x) * g(x) - \int f(x) * g'(x)\, dx$$

mit

$$g(x) = x \ \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) \ = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * x^2} \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * x^2} dx = \ 1$$

lösen zu

$$E\{x\} = 1 * x - \int 1 * 1 * dx = x - x = 0$$

$$E\{x\} = 0 \qquad \text{(A.5.1.3a)}$$

Der Übergang auf die normalverteilte Zufallsvariable $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ erfolge anhand der Substitution

$$x = \frac{y - \mu}{\sigma} \Rightarrow \ y = \ \sigma * x + \mu \qquad \text{(A.5.1.8)}$$

entsprechend der linearen (Skalen-) Transformation (KREYSZIG 1998)

$$E\{y\} = E\{\sigma * x + \mu\} = E\{\sigma * x\} + \mu * E\{1\} = \ \sigma * E\{x\} + \mu = \ \sigma * 0 + \mu = \ \mu$$

$$E\{y\} = \mu \qquad \text{(A.5.1.3b)}$$

A.5.1.3 Erwartungswert 2. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y

Für die 2. Ordnung gilt mit $n = 2$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x der Ansatz

$$E\{x^2\} = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * e^{-\frac{1}{2} * x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x * \left(x * e^{-\frac{1}{2} * x^2}\right) dx$$

Die Anwendung der partiellen Integration mit

$$g(x) = x \ \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) \ = \ x * e^{-\frac{1}{2} * x^2} \Rightarrow f(x) = \ -e^{-\frac{1}{2} * x^2}$$

ergibt

$$E\{x^2\} = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \left(\left[-x * e^{-\frac{1}{2}*x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 1 * \left(-e^{-\frac{1}{2}*x^2} \right) dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \left(0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx = 1$$

$$E\{x^2\} = 1 \qquad \text{(A.5.1.4a)}$$

da die zugehörige Stammfunktion über das gegebene Intervall $[-\infty; \infty]$ ein sicheres Ereignis der Standardnormalverteilung darstellt.

Der Übergang auf die normalverteilte Zufallsvariable $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ erfolge anhand der Substitution (A.5.1.8) zu

$$E\{y^2\} = E\{(\sigma * x + \mu)^2\} = E\{\sigma^2 * x^2 + 2 * \sigma * x * \mu + \mu^2\} = \sigma^2 * E\{x^2\} + 2 * \sigma * \mu * E\{x\} + \mu^2$$
$$= \sigma^2 * 1 + 2 * \sigma * \mu * 0 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E\{y^2\} = \sigma^2 + \mu^2 \qquad \text{(A.5.1.4b)}$$

und liefert so den *Verschiebungssatz für die Varianz*

$$\sigma^2 = E\{y^2\} - \mu^2 \qquad \text{(A.5.1.5a)}$$

Von Interesse ist im Zusammenhang mit dem Erwartungswert 2. Ordnung jedoch im Allgemeinen nur die Streuung σ^2 der normalverteilten Zufallsvariable y, welche sich in ihrer unverzerrten Form als die Streuung um den Mittelwert μ darstellt und daher als zentrales Moment 2. Ordnung (KREYSZIG 1998) um diesen Mittelwert zu reduzieren ist:

$$\sigma^2 = E\{y^2\} - \mu^2 = E\{y^2\} - 2 * \mu^2 + \mu^2 = E\{y^2\} - 2 * \mu * E\{y\} + \mu^2 = E\{(y - \mu)^2\}$$

$$\sigma^2 = E\{(y - \mu)^2\} \qquad \text{(A.5.1.5b)}$$

A.5.1.4 Erwartungswert 3. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y

Für die 3. Ordnung gilt mit $n = 3$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x der Ansatz

$$E\{x^3\} = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^3 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x * \left(x^2 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} \right) dx$$

Die Anwendung der partiellen Integration mit

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * x^2 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx = 1$$

ergibt

$$E\{x^3\} = 1 * x - \int 1 * 1 * dx = x - x = 0$$

$$E\{x^3\} = 0 \ (Schiefe) \qquad \text{(A.5.1.6a)}$$

Die Identität (A.5.1.6a) liegt dem Erwartungswert (5.19a) der univariaten Normalverteilung unmittelbar zugrunde.

Der Übergang auf die normalverteilte Zufallsvariable $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ erfolge anhand der Substitution (A.5.1.8) zu

$$E\{y^3\} = E\{(\sigma * x + \mu)^3\} = E\{\sigma^3 * x^3 + 3 * \sigma^2 * x^2 * \mu + 3 * \sigma * x * \mu^2 + \mu^3\}$$
$$= \sigma^3 * E\{x^3\} + 3 * \sigma^2 * E\{x^2\} * \mu + 3 * \sigma * E\{x\} * \mu^2 + \mu^3$$
$$= \sigma^3 * 0 + 3 * \sigma^2 * 1 * \mu + 3 * \sigma * 0 * \mu^2 + \mu^3$$
$$= 3 * \sigma^2 * \mu + \mu^3$$

$$E\{y^3\} = 3 * \sigma^2 * \mu + \mu^3 \qquad \text{(A.5.1.6b)}$$

Hieraus geht der zuvor betrachtete Spezialfall $E\{x^3\} = 0$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x mit $\mu = 0$ hervor.

A.5.1.5 Erwartungswert 4. Ordnung der normalverteilten Zufallsvariable y

Für die 4. Ordnung gilt mit $n = 4$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x der Ansatz

$$E\{x^4\} = E\left\{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^4\right\} = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2*\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^4 * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

Anhand der Substitution (A.5.1.8) erfolge auf der rechten Gleichungsseite zunächst der Übergang auf die standardnormalverteilte Zufallsvariable x

$$x = \frac{y-\mu}{\sigma} \Rightarrow y = \sigma * x + \mu \Rightarrow \begin{cases} dy = \sigma * dx \\ y - \mu = \sigma * x \end{cases}$$

mit einhergehendem Übergang auf das Integral nach dx und entsprechender Transformation der Intervalgrenzen, welche dadurch unverändert bleiben

$$E\{x^4\} = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^4 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} * \sigma * dx = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^4 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx$$

Die Anwendung der partiellen Integration mit

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3 * x^2$$

$$f'(x) = x * e^{-\frac{1}{2}*x^2} \Rightarrow f(x) = -e^{-\frac{1}{2}*x^2}$$

ergibt

$$E\{x^4\} = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \left(\left[-x^3 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + 3 * \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \left[-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + 3 * \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * e^{-\frac{1}{2}*x^2} dx$$

Die Auflösung des Terms $\left[-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$ führt auf die Grenzwertdifferenz

$$\left[-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right) - \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right)$$

Nach BRONSTEIN & SEMENDJAJEW (1983) gilt die Regel von de l'Hospital mit den differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

falls $lim_{x \to \pm\infty}(f(x)) = lim_{x \to \pm\infty}(g(x)) = \pm\infty$ oder $lim_{x \to \pm\infty}(f(x)) = lim_{x \to \pm\infty}(g(x)) = 0$ und $g'(x) \neq 0$. Der hier erfüllte erste Fall (bestimmte Divergenz) lässt die Anwendung dieser Regel zu, welche aufgrund der dritten Potenz von x in $f(x)$ rekursiv erfolgen muss:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{3 * x^2}{x * e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{6 * x}{x^2 * e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{6}{x^3 * e^{\frac{1}{2}*x^2}} \right) = 0$$

Für den aufzulösenden Term ergibt sich somit

$$\left[-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}}\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^3}{e^{\frac{1}{2}*x^2}}\right) = 0 - 0 = 0$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die bisherige Entwicklung von $E\{x^4\}$ liefert

$$E\{x^4\} = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * 0 + 3 * 1$$

$$E\{x^4\} = 3 \ \ (Kurtosis) \qquad \text{(A.5.1.7a)}$$

Aus der Betrachtung der standardnormalverteilten Zufallsvariable x resultiert infolge der Normierung dieser Variable auf eine Standardabweichung bzw. Varianz von 1 und auf einen Mittelwert von $\mu = 0$ unmittelbar die dimensionslose Wölbung (Kurtosis) der Standardnormalverteilung als $E\{x^4\} = 3$.

Der Rückgang auf die normalverteilte Zufallsvariable $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ erfolge anhand der Substitution (A.5.1.8) und auf der Grundlage der bisher bekannten Identitäten zu

$$E\{y^4\} = E\{(\sigma * x + \mu)^4\} = E\{(\sigma^2 * x^2 + 2 * \sigma * x * \mu + \mu^2)^2\}$$

$$= E\{\sigma^4 * x^4 + 2 * \sigma^3 * x^3 * \mu + \sigma^2 * x^2 * \mu^2 + 2 * \sigma^3 * x^3 * \mu + 4 * \sigma^2 * x^2 * \mu^2 + 2 * \sigma * x * \mu^3 + \sigma^2 * x^2 * \mu^2 + 2 * \sigma * x * \mu^3 + \mu^4\}$$

$$= E\{\sigma^4 * x^4 + 4 * \sigma^3 * x^3 * \mu + 6 * \sigma^2 * x^2 * \mu^2 + 4 * \sigma * x * \mu^3 + \mu^4\}$$

$$= \sigma^4 * E\{x^4\} + 4 * \sigma^3 * \mu * E\{x^3\} + 6 * \sigma^2 * \mu^2 * E\{x^2\} + 4 * \sigma * \mu^3 * E\{x\} + \mu^4$$

$$= \sigma^4 * 3 + 4 * \sigma^3 * \mu * 0 + 6 * \sigma^2 * \mu^2 * 1 + 4 * \sigma * \mu^3 * 0 + \mu^4$$

$$E\{y^4\} = 3 * \sigma^4 + 6 * \sigma^2 * \mu^2 + \mu^4 \qquad \text{(A.5.1.7b)}$$

Hieraus geht der zuvor betrachtete Spezialfall $E\{x^4\} = 3$ für die standardnormalverteilte Zufallsvariable x mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ hervor.

A.5.2 Erwartungswerte der multivariaten Normalverteilung bis 2. Ordnung

A.5.2.1 Korrelation 0. Ordnung

Seien x_i und x_j zwei Zufallsvariable und unabhängig, so sind x_i und x_j unkorreliert. Es gilt der Umkehrschluß dazu rein stochastisch betrachtet für die bivariate Normalverteilung ebenfalls, im Allgemeinen aber nicht, da die Zufallsvariable x_i und x_j zwar stochastisch unkorreliert, aber infolge eines möglichen funktionalen Zusammenhangs voneinander abhängig sein können (KREYSZIG 1998).

Nach dem *Verschiebungssatz für Kovarianzen* (BÖKER 2005) ergibt sich die Kovarianz der bivariat in 0. Ordnung korrelierten diskreten oder stetigen Zufallsvariablen x_i und x_j als deren Produktmoment $E\{x_i * x_j\}$ um ihren Erwartungswert $\mu_i * \mu_j$ (HENZE 2011) zu

$$\sigma_{ij} = E\{x_i * x_j\} - \mu_i * \mu_j \tag{A.5.2.1a}$$

und damit der Erwartungswert zu

$$E\{x_i * x_j\} = \sigma_{ij} + \mu_i * \mu_j \tag{A.5.2.1b}$$

Für die Zusammenhänge dieser Betrachtungen sind bezüglich der Korrelation 0. Ordnung die Größen

$$x_i = dl_i$$
$$x_j = dl_j$$

mit

$$dl = l - l_0$$

und Linearisierungspunkt l_0 als Mittel- oder Erwartungswert μ wählbar, so dass

$$E\{dl\} = E\{l - l_0\} = E\{l - \mu\} = E\{l\} - \mu = \mu - \mu = 0$$

Aufgrund der Unabhängigkeit des Grades der Korrelation 0. Ordnung von den Mittelwerten μ_i und μ_j der originären Zufallsvariablen x_i und x_j ist ebenfalls

$$\mu_i = \mu_j = 0$$

wählbar und somit gilt für den – hier auch in Beziehung (A.5.3.1b) auftretenden – Erwartungswert

$$E\{x_i * x_j\} = \sigma_{ij} \tag{A.5.2.1c}$$

A.5.2.2 Korrelation 1. Ordnung

Die Korrelation 1. Ordnung (auch *Partialkorrelation*, *bedingte Korrelation*, *Interferenzkorrelation*) lässt für die in 1. Ordnung korrelierten diskreten oder stetigen Zufallsvariablen z_a und z_b jeweils die Form $z = f(x_i, x_j)$ mit in 0. Ordnung bereits korrelierten originären Zufallsvariablen x_i und x_j zu.
Für die somit nicht zwingend originären Zufallsvariablen z_a und z_b gilt nach HUSSY & TOBINSKI (2008) der *Verschiebungssatz für Kovarianzen* (A.5.40a)

$$\sigma_{ab} = E\{z_a * z_b\} - \mu_a * \mu_b \tag{A.5.2.1d}$$

entsprechend und somit

$$E\{z_a * z_b\} = \sigma_{ab} + \mu_a * \mu_b \tag{A.5.2.1e}$$

Mit Einführung der Kovarianz als (BRONSTEIN & SEMENDJAJEW 1983)

$$\sigma_{ab} = \rho_{ab} * \sqrt{Var(z_a)} * \sqrt{Var(z_b)} \tag{A.5.2.2a}$$

und darin ρ_{ab} als (dimensionslosen und nicht intervallskalierten) Korrelationskoeffizienten im Sinne einer Maßzahl für die lineare (aber nicht für die allgemeine) Abhängigkeit von z_a und z_b (HUSSY & TOBINSKI 2008) mit $\rho_{ab} \in [-1; 1]$ ergibt sich aus (A.5.2.1e) mit (A.5.2.2a) weiter

$$E\{z_a * z_b\} = \rho_{ab} * \sqrt{Var(z_a)} * \sqrt{Var(z_b)} + \mu_a * \mu_b \tag{A.5.2.1f}$$

Der gesuchte Erwartungswert $E\{z_a * z_b\}$ existiert für den diskreten Fall, wenn die Reihe

$$E\{z_a * z_b\} = \sum_{i=1}^{n} z_{a_i} * z_{b_i} * p(z_i) \tag{A.5.2.3a}$$

absolut konvergiert bzw. für den stetigen Fall das (Doppel-) Integral

$$E\{z_a * z_b\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_a * z_b * p(\boldsymbol{z}) dz_a \, dz_b \tag{A.5.2.3b}$$

mit der Dichtefunktion

$$p(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2 * \pi)^{\frac{d}{2}} * \sqrt{Det(\boldsymbol{C_{ll}})}} * e^{-\frac{1}{2} * (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^T * \boldsymbol{C_{ll}}^{-1} * (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})} \tag{A.5.1.1c}$$

mit

$\boldsymbol{z}$ = Vektor der Zufallsvariablen $\boldsymbol{z}$

d = Dimension bzw. Anzahl der Zufallsvariablen $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{C_{ll}}$ = Kovarianzmatrix der Zufallsvariablen $\boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{\mu}$ = Vektor der Mittelwerte der Zufallsvariablen $\boldsymbol{z}$

existiert (KREYSZIG 1998). Die Dichtefunktionen (A.5.1.1a) und (A.5.1.1b) gehen als Spezialfälle der univariaten (Standard-) Normalverteilung mit $d = 1$ aus der Dichtefunktion $p(\boldsymbol{z})$ gemäß (A.5.1.1c) der multivariaten Normalverteilung hervor.

Die Auflösung des Integrals nach (A.5.2.3b) ist jedoch entweder elementar oder analytisch nicht möglich oder analytisch sehr aufwändig, so dass die Ermittlung des Erwartungswertes $E\{z_a * z_b\}$ anhand alternativer Überlegungen erfolgen soll:

Der Erwartungswert $E\{z_a * z_b\}$ strebe im diskreten Falle für $n \to \infty$ nach Beziehung (A.5.2.3a) gegen einen endlichen Grenzwert. Im Falle einer stetigen Verteilung derselben Dichtefunktion ist dieser Erwartungswert entsprechend durch das (Doppel-) Integral (A.5.2.3b) definiert. Unter diesen Voraussetzungen besteht asymptotische Effizienz infolgedessen die Mittelwerte μ_a und μ_b der Zufallsvariablen z_a und z_b ebenfalls gegen einen endlichen Grenzwert und die Varianzen jener Mittelwerte gegen Null streben, falls es sich bei der Zufallsvariablen z um die Form $z = x_i^2$ bzw. $z = x_i * x_j$ und damit bei den zugehörigen Mittelwerten μ um die Varianz $\mu = \sigma_i^2$ bzw. die Kovarianz $\mu = \sigma_{ij}$ handelt.

A.5.2.3 Beweis für die Varianz der Varianz

Nach PANTLE (2004) gilt für die Varianz der Varianz s_n^2 einer diskreten Stichprobe eines Umfangs von n Einzelereignissen bzw. Beobachtungen

$$Var(s_n^2) = \frac{1}{n} * \left(\mu_4' - \frac{n-3}{n-1} * \sigma^4\right) \qquad \text{(A.5.2.4a)}$$

mit

σ = Standardabweichung der Zufallsvariablen y

μ_4' = 4. zentrales Moment der Stichproben- bzw. Zufallsvariablen y

Für dieses 4. zentrale Moment gilt gemäß (A.5.1.7b) bezogen auf die Zufallsvariable y und mit μ als zugehörigem Erwartungswert

$$\mu_4' = E\{y^4\} = 3 * \sigma^4 + 6 * \mu^2 * \sigma^2 + \mu^4$$

und somit in Fortführung von Beziehung (A.5.2.4a)

$$Var(s_n^2) = \frac{1}{n} * \left(3 * \sigma^4 + 6 * \mu^2 * \sigma^2 + \mu^4 - \frac{n-3}{n-1} * \sigma^4\right) \qquad \text{(A.5.2.4b)}$$

Der Klammerterm in Beziehung (A.5.2.4b) strebt für $n \to \infty$ gegen $2 * \sigma^4 + 6 * \mu^2 * \sigma^2 + \mu^4$ und im speziellen Fall mit $\mu = 0$ gegen $2 * \sigma^4$ und so in jedem Falle gegen einen endlichen Wert und daher die Varianz der Varianz für eine mit diesem Grenzverhalten

$$\lim_{n\to\infty}\left(Var(s_n^2)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \left(3 * \sigma^4 + 6 * \mu^2 * \sigma^2 + \mu^4 - \frac{n-3}{n-1} * \sigma^4\right)\right) = 0$$

gegebene stetige Verteilung mit $lim_{n\to\infty}(s_n^2) = \sigma^2$ gegen Null:

$$Var(\sigma^2) = 0 \qquad \text{(A.5.2.5a)}$$

Für die Gültigkeit von (A.5.2.5a) besteht so auch keine Einschränkung auf den Degenerationsfall mit $\sigma = 0$.

A.5.2.4 Stochastizität des empirischen und theoretischen Korrelationskoeffizienten

Seien x_i und x_j zwei originäre bivariat normalverteilte Zufallsvariable, so unterliegt der zugehörige empirische Korrelationskoeffizient r_{ij} einer diskreten rechtssteilen unimodalen Verteilungsfunktion und lässt sich anhand der Fisher-Transformation in den annähernd normalverteilten und annähernd intervallskalierten standardisierten Hilfswert (HARTUNG 2005)

$$z_0 = 0.5 * ln\left(\frac{1 + r_{ij}}{1 - r_{ij}}\right) = 0.5 * ln\left(\frac{1 + r}{1 - r}\right) \qquad \text{(A.5.2.6a)}$$

überführen. Die halbe Spannweite des zugehörigen Konfidenzintervalls lautet mit dem Stichprobenumfang n in ebenfalls standardisierter Form (KREYSZIG 1998)

$$a_z = \frac{c}{\sqrt{n-3}} \qquad \text{(A.5.2.7)}$$

Darin ist c auf das Schrittmaß der einfachen Standardabweichung skaliert, so dass sich die einfache Standardabweichung des empirischen Korrelationskoeffizienten standardisiert ergibt zu $a_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$. Der Übergang auf den stetigen Fall geht mit dem Grenzwert für $n \to \infty$ einher und lautet

$$\lim_{n\to\infty}(a_z) = 0$$

Die Re-Transformation einer Fisher-transformierten und standardisierten Größe z in die rechtssteile unimodale Verteilungsfunktion des originären (und hier formal schon auf den stetigen Fall bezogenen, also theoretischen) Korrelationskoeffizienten $\rho = lim_{n\to\infty}(r)$ lautet (KREYSZIG 1998)

$$\rho = tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \text{(A.5.2.6b)}$$

Es ergibt sich also die originäre Standardabweichung σ_ρ des (wieder auf den stetigen Fall bezogenen, theoretischen) Korrelationskoeffizienten ρ nach Re-Transformation der zugehörigen nullgleichen (standardisierten) Standardabweichung zu

$$\sigma_\rho = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Für den hier stets betrachteten Fall einer stetigen Verteilungsfunktion weist daher der Korrelationskoeffizient $\rho = \rho_{ij}$ der beiden originären Zufallsvariable x_i und x_j keine Streuung auf: $\sigma_\rho = \sigma_{\rho_{ij}} = 0$.

A.5.2.5 Beweis für die Varianz der Kovarianz

Seien x_i und x_j zwei originäre Zufallsvariable, so gilt nach BRONSTEIN & SEMENDJAJEW (1983) für die somit vorliegende Korrelation 0. Ordnung

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} * \sqrt{Var(x_i)} * \sqrt{Var(x_j)} = \rho_{ij} * \sqrt{\sigma_i^2} * \sqrt{\sigma_j^2} = \rho_{ij} * \sigma_i * \sigma_j \qquad \text{(A.5.2.2b)}$$

Wie zuvor gezeigt, ist für eine stetige Verteilung die Varianz der (quadratischen und genauigkeitsanzeigenden Größe) Varianz σ_i^2 einer Zufallsvariable x_i gleich Null; infolge der fehlenden Streuung der Varianz σ_i^2 weist auch die zugehörige einfache genauigkeitsanzeigende Größe σ_i als Standardabweichung der Zufallsvariable x_i im stetigen Falle keine Streuung auf, also $Var(\sigma_i) = 0$. Da der Korrelationskoeffizient ρ_{ij} keine Zufallsvariable im statistischen Sinne darstellt und entsprechend der Beweisführung des vorangegangenen Abschnitts im stetigen Falle keine Streuung aufweist, sind alle Größen auf der rechten Seite von Beziehung (A.5.2.2b) varianzfrei, so dass für den stetigen Falle gilt

$$Var(\sigma_{ij}) = 0 \qquad \text{(A.5.2.5b)}$$

A.5.2.6 Schlussbeweis für den Erwartungswert $E\{z_a * z_b\}$

Nehmen also zwei in 1. Ordnung korrelierte Zufallsvariable z_a und z_b jeweils die Form $z = x_i^2$ oder $z = x_i * x_j$ an, so – und nur unter den Voraussetzungen dieser Art von Interferenzkorrelation – ergibt sich der Erwartungswert $E\{z_a * z_b\}$ als Sonderfall von (A.5.2.1f) mit $Var(z_a) = Var(z_b) = 0$ zu

$$E\{z_a * z_b\} = \mu_a * \mu_b \qquad \text{(A.5.2.1g)}$$

und so als Produkt der Erwartungs- bzw. Mittelwerte μ_a und μ_b der nicht originären Zufallsvariable z_a und z_b mit $\mu = \sigma_i^2$ bzw. $\mu = \sigma_j^2$ oder $\mu = \sigma_{ij}$.

Das Bildungsgesetz (A.5.2.1g) liegt den Erwartungswerten (A.5.3.1d) bis (A.5.3.1i) der gemischten Momente multivariater Normalverteilung unmittelbar zugrunde.

Die Identität $E\{\varepsilon_a^2 * \varepsilon_b\} = 0$ (5.19b) lässt sich anhand der allgemein gültigen Beziehung (A.5.2.1f) für die Erwartungswertform $E\{z_a * z_b\}$ zeigen. Darin kann $E\{\varepsilon_b\} = \mu_b = 0$ angenommen werden; mit $\varepsilon_a^2 = z_a$ existiert ferner der Erwartungswert $E\{\varepsilon_a^2\} = \sigma_a^2$ und damit nach (A.5.2.5a) für $\sigma_a^2 = z_a$ die Identität $Var(\sigma_a^2) = Var(z_a) = 0$. Aus (A.5.2.1f) resultiert somit

$$E\{\varepsilon_a^2 * \varepsilon_b\} = E\{z_a * z_b\} = \rho_{ab} * \sqrt{Var(z_a)} * \sqrt{Var(z_b)} + \mu_a * \mu_b$$

$$E\{\varepsilon_a^2 * \varepsilon_b\} = \rho_{ab} * 0 * \sqrt{Var(z_b)} + \mu_a * 0 = 0$$

Die Identität $E\{\varepsilon_a * (\varepsilon_b * \varepsilon_c)\} = 0$ (5.19c1) lässt sich anhand der allgemein gültigen Beziehung (A.5.2.1f) für die Erwartungswertform $E\{z_a * z_b\}$ zeigen. Darin kann $E\{\varepsilon_a\} = \mu_a = 0$ angenommen werden; mit $\varepsilon_b * \varepsilon_c = z_b$ existiert ferner der Erwartungswert $E\{\varepsilon_b * \varepsilon_c\} = \sigma_{bc}$ und damit nach (A.5.2.5b) für $\sigma_{bc} = z_b$ die Identität $Var(\sigma_{bc}) = Var(z_b) = 0$. Aus (A.5.2.1f) resultiert somit

$$E\{\varepsilon_a * (\varepsilon_b * \varepsilon_c)\} = E\{z_a * z_b\} = \rho_{ab} * \sqrt{Var(z_a)} * \sqrt{Var(z_b)} + \mu_a * \mu_b$$

$$E\{\varepsilon_a * (\varepsilon_b * \varepsilon_c)\} = \rho_{ab} * \sqrt{Var(z_a)} * 0 + 0 * \mu_b = 0$$

Für den Erwartungswert $E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b) * \varepsilon_c\}$ gilt mit vertauschten Indizes entsprechend die Identität (5.19c2)

$$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b) * \varepsilon_c\} = 0$$

A.5.3 Entwicklung des Erwartungswertterms $\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^{\boldsymbol{T}}\}$

Zur Überführung des in den Beziehungen (5.11), (5.14) und (5.15b) auftretenden Produkts

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T$$

in eine dem Erwartungswert zugängliche Form sei zunächst der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0}$ elementweise dargestellt und dabei neben dem ersten (l_1) und letzten (l_n) noch mit dem i-ten (l_i) und j-ten (l_j) Element angegeben, da aufgrund der Kronecker-Produktbildung und des dyadischen Produkts innerhalb der hier betrachteten Erwartungswertform maximal vier verschiedene Beobachtungen an der Produktbildung eines einzelnen Erwartungswertterms als Element von $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ beteiligt sein können:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0} = \begin{pmatrix} l_1 - l_{0_1} \\ \vdots \\ l_i - l_{0_i} \\ \vdots \\ l_j - l_{0_j} \\ \vdots \\ l_n - l_{0_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Auf der Grundlage der vorstehenden Form für den Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ lässt sich somit die Auflösung und Umwandlung der hier betrachteten Erwartungswertform für den allgemeinen Fall zeigen.

Dazu sei im nächsten Schritt das Kronecker-Produkt des Vektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ mit sich selbst gebildet:

$$(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l_0})\otimes(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l_0})=\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1*\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_1*\varepsilon_i\\ \vdots\\ \varepsilon_1*\varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_1*\varepsilon_n\\ \vdots\\ \varepsilon_i*\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_i*\varepsilon_i\\ \vdots\\ \varepsilon_i*\varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_i*\varepsilon_n\\ \vdots\\ \varepsilon_j*\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_j*\varepsilon_i\\ \vdots\\ \varepsilon_j*\varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_j*\varepsilon_n\\ \vdots\\ \varepsilon_n*\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n*\varepsilon_i\\ \vdots\\ \varepsilon_n*\varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_n*\varepsilon_n\end{pmatrix}$$

Das Argument der hier betrachteten Erwartungswertform ist das dyadische Produkt dieses Vektors mit sich selbst und somit symmetrisch; für die Belange der Entwicklung der Beziehungen (5.11), (5.14) und (5.15b) ist daher die elementweise Auflösung der rechten oberen Hälfte des dyadischen Produkts ausreichend:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon})*(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{\varepsilon})^T=$$

	$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$\varepsilon_i * \varepsilon_1$	$\varepsilon_i * \varepsilon_i$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	ε_1^4	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_i^2$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$		$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i)^2$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$			$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$				$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$					$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i)^2$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_i$						ε_i^4

	$\varepsilon_i * \varepsilon_j$	$\varepsilon_i * \varepsilon_n$	$\varepsilon_j * \varepsilon_1$	$\varepsilon_j * \varepsilon_i$	$\varepsilon_j * \varepsilon_j$
	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_j^2$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_i$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_j^2$
$\varepsilon_i * \varepsilon_j$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j)^2$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_n$		$(\varepsilon_i * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_1)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_1$			$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_i$				$(\varepsilon_i * \varepsilon_j)^2$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_j$					ε_j^4

	$\varepsilon_j * \varepsilon_n$	$\varepsilon_n * \varepsilon_1$	$\varepsilon_n * \varepsilon_i$	$\varepsilon_n * \varepsilon_j$	$\varepsilon_n * \varepsilon_n$
	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_n^2$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_i$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_n^2$
$\varepsilon_i * \varepsilon_j$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_i * \varepsilon_n$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_1$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_i$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
$\varepsilon_j * \varepsilon_j$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * \varepsilon_n^2$
$\varepsilon_j * \varepsilon_n$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n)^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_n * \varepsilon_1$		$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_n * \varepsilon_i$			$(\varepsilon_i * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_n * \varepsilon_j$				$(\varepsilon_j * \varepsilon_n)^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
$\varepsilon_n * \varepsilon_n$					ε_n^4

Für den Übergang auf die Erwartungswerte der teilweise gemischten Momente multivariater Normalverteilung sind folgende Identitäten zu berücksichtigen:

$E\{\varepsilon_a^2\} = \sigma_a^2$	(Varianz)	(A.5.3.1a)	(s. Anhang 5.1.3)
$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b)\} = \sigma_{ab}$	(Kovarianz)	(A.5.3.1b)	(s. Anhang 5.2.1)
$E\{\varepsilon_a^4\} = 3 * \sigma_a^4$	(Kurtosis)	(A.5.3.1c)	(s. Anhang 5.1.5)
$E\{\varepsilon_a^2 * (\varepsilon_a * \varepsilon_b)\} = \sigma_a^2 * \sigma_{ab}$		(A.5.3.1d)	(s. Anhang 5.2.2)
$E\{\varepsilon_a^2 * (\varepsilon_b * \varepsilon_c)\} = \sigma_a^2 * \sigma_{bc}$		(A.5.3.1e)	(s. Anhang 5.2.2)
$E\{\varepsilon_a^2 * \varepsilon_b^2\} = \sigma_a^2 * \sigma_b^2$		(A.5.3.1f)	(s. Anhang 5.2.2)
$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b)^2\} = \sigma_{ab}^2$		(A.5.3.1g)	(s. Anhang 5.2.2)
$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b) * (\varepsilon_a * \varepsilon_c)\} = \sigma_{ab} * \sigma_{ac}$		(A.5.3.1h)	(s. Anhang 5.2.2)
$E\{(\varepsilon_a * \varepsilon_b) * (\varepsilon_c * \varepsilon_d)\} = \sigma_{ab} * \sigma_{cd}$		(A.5.3.1i)	(s. Anhang 5.2.2)

Der Übergang auf die Erwartungswerte liefert:

	$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$\varepsilon_i * \varepsilon_1$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$3 * \sigma_1^4$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$		σ_{1i}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	σ_{1i}^2
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$			σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$				σ_{1n}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$					σ_{1i}^2

	$\varepsilon_i * \varepsilon_i$	$\varepsilon_i * \varepsilon_j$	$\varepsilon_i * \varepsilon_n$	$\varepsilon_j * \varepsilon_1$	$\varepsilon_j * \varepsilon_i$	$\varepsilon_j * \varepsilon_j$	$\varepsilon_j * \varepsilon_n$	$\varepsilon_n * \varepsilon_1$
	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\sigma_1^2 * \sigma_i^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_1^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	σ_{1n}^2
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_i$	$3 * \sigma_i^4$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_i^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_j$		σ_{ij}^2	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1j}$	σ_{ij}^2	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_n$			σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{in} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	σ_{1n}^2
$\varepsilon_j * \varepsilon_1$				σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_i$					σ_{ij}^2	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_j$						$3 * \sigma_j^4$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_n$							σ_{jn}^2	$\sigma_{jn} * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_n * \varepsilon_1$								σ_{1n}^2

	$\varepsilon_n * \varepsilon_i$	$\varepsilon_n * \varepsilon_j$	$\varepsilon_n * \varepsilon_n$
	(14)	(15)	(16)
$\varepsilon_1 * \varepsilon_1$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_1^2 * \sigma_n^2$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_i$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1i}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_j$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$
$\varepsilon_1 * \varepsilon_n$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_1$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1i}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_i$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_i^2 * \sigma_n^2$
$\varepsilon_i * \varepsilon_j$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$
$\varepsilon_i * \varepsilon_n$	σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_1$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_i$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$
$\varepsilon_j * \varepsilon_j$	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_j^2 * \sigma_n^2$
$\varepsilon_j * \varepsilon_n$	$\sigma_{jn} * \sigma_{in}$	σ_{jn}^2	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
$\varepsilon_n * \varepsilon_1$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
$\varepsilon_n * \varepsilon_i$	σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
$\varepsilon_n * \varepsilon_j$		σ_{jn}^2	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
$\varepsilon_n * \varepsilon_n$			$3 * \sigma_n^4$

Es zeigt sich, dass die hier betrachtete Erwartungswertform äquivalent ist zum einfachen dyadischen Produkt der vektorisierten $\boldsymbol{C_{ll}}$-Kovarianzmatrix mit sich selbst $vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T$ zuzüglich der vier Formen $2 * \sigma_1^4$, $2 * \sigma_i^4$, $2 * \sigma_j^4$ und $2 * \sigma_n^4$ an den entsprechenden Stellen der Hauptdiagonalen, welche sich anhand des folgenden Terms als ebenfalls dyadisches Produkt darstellen lassen: $2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$

Aufgrund der Symmetrie beider dyadischen Produkte sei die elementweise Auflösung der rechten oberen Hälfte ihrer Summe ausreichend:

$$E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} = vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T =$$

	σ_1^2	σ_{i1}	σ_{j1}	σ_{n1}	σ_{1i}	σ_i^2	σ_{ji}	σ_{ni}	σ_{1j}	σ_{ij}
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
σ_1^2	$3 * \sigma_1^4$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_1^2 * \sigma_i^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$
σ_{i1}		σ_{1i}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	σ_{1i}^2	$\sigma_i^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$
σ_{j1}			σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$
σ_{n1}				σ_{1n}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{ij}$
σ_{1i}					σ_{1i}^2	$\sigma_i^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$
σ_i^2						$3 * \sigma_i^4$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$
σ_{ji}							σ_{ij}^2	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1j}$	σ_{ij}^2
σ_{ni}								σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{in} * \sigma_{ij}$
σ_{1j}									σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$
σ_{ij}										σ_{ij}^2

	σ_j^2	σ_{nj}	σ_{1n}	σ_{in}	σ_{jn}	σ_n^2
	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
σ_1^2	$\sigma_1^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_1^2 * \sigma_n^2$
σ_{i1}	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1i}$
σ_{j1}	$\sigma_j^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$
σ_{n1}	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	σ_{1n}^2	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
σ_{1i}	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1i}$
σ_i^2	$\sigma_i^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_i^2 * \sigma_n^2$
σ_{ji}	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$
σ_{ni}	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{in} * \sigma_{1n}$	σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
σ_{1j}	$\sigma_j^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$
σ_{ij}	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$
σ_j^2	$3 * \sigma_j^4$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_j^2 * \sigma_n^2$
σ_{nj}		σ_{jn}^2	$\sigma_{jn} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{jn} * \sigma_{in}$	σ_{jn}^2	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
σ_{1n}			σ_{1n}^2	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
σ_{in}				σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
σ_{jn}					σ_{jn}^2	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
σ_n^2						$3 * \sigma_n^4$

A.5.4 Entwicklung der parameterseitigen Kovarianzanteile 2. Ordnung nach Grafarend & Schaffrin (1993)

Die Kovarianzmatrix der Parameter $\boldsymbol{C_{xx}}$ wird in ihrem die Glieder 2. Ordnung betreffenden Anteil $\boldsymbol{C_{xx}(2)}$ von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) abweichend zum Ergebnis dieser Arbeit angegeben, jeweils bezogen auf die nichtlineare Varianzenfortpflanzung:

$$\boldsymbol{C_{xx}(2)} = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0} * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + E\{(\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})^T \otimes \boldsymbol{C_{ll}} \otimes (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})\}) * \boldsymbol{D_V^2 f(l)}\Big|_{l_0}^{T} \qquad \text{(C37)}$$

Die Beziehung (C37) ist jedoch aufgrund des darin auftretenden Erwartungswertterms

$$E\{(\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})^T \otimes \boldsymbol{C_{ll}} \otimes (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})\}$$

in der angegebenen Form nicht in datenverarbeitenden Systemen einsetzbar und verlangt so die Überführung jenes Terms in eine äquivalente geschlossene Darstellung, welche der Arithmetik zugänglich, in diesem Sinne finalisiert und damit vergleichsfähig zum Ergebnis dieser Arbeit ist.

Dazu sei vorbereitend die Definition des Kronecker-Produkts auf den Term $\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$ angewendet (angegeben für den allgemeinen Fall der 1. Beobachtung l_1, der beliebigen Beobachtungen l_i und l_j und der letzten Beobachtung l_n):

$$\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{1i} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{1j} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{1n} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{i1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_i^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{ij} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{in} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{j1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{ji} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_j^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{jn} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{ni} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{nj} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_n^2 * \boldsymbol{C_{ll}} \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Definition des Kronecker-Produkts auf den zu überführenden Erwartungswertterm liefert mit $\varepsilon_i = l_i - E\{l_i\}$ für das erste Produkt

$$(\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})^T \otimes \boldsymbol{C_{ll}} = (\varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}})$$

und so für beide Produkte

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\})^T \otimes \boldsymbol{C_{ll}} \otimes (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\}) \\ &\quad = (\varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} \quad \cdots \quad \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}}) \otimes (\boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\}) \\ &\quad = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 * \varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_1 * \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_1 * \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_1 * \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_i * \varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_i * \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_i * \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_i * \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_j * \varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_j * \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_j * \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \varepsilon_j * \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n * \varepsilon_1 * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \varepsilon_n * \varepsilon_i * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \varepsilon_n * \varepsilon_j * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \varepsilon_n * \varepsilon_n * \boldsymbol{C_{ll}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Übergang auf die Erwartungswerte führt schließlich auf

$$E\{(\boldsymbol{l}-E\{\boldsymbol{l}\})^T \otimes \boldsymbol{C_{ll}} \otimes (\boldsymbol{l}-E\{\boldsymbol{l}\})\} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{1i} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{1j} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{1n} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{i1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_i^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{ij} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{in} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{j1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{ji} * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_j^2 * \boldsymbol{C_{ll}} & \dots & \sigma_{jn} * \boldsymbol{C_{ll}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{ni} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_{nj} * \boldsymbol{C_{ll}} & \cdots & \sigma_n^2 * \boldsymbol{C_{ll}} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$$

Damit vereinfacht und finalisiert sich Beziehung (C37) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2}) &= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0}^{T} \\ &= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (2 * \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0}^{T} \\ &= \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\Big|_{l_0}^{T} \end{aligned}$$

In dieser finalisierten Form ist (C37) geschlossen, arithmetikfähig und vergleichsfähig zum Ergebnis dieser Arbeit, das als (5.22) erkennbar von Beziehung (C37) der untersuchten Quelle abweicht:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2}) = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0} & \\ & * \Big(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big) \\ & * \Big(vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big)\Big)^T \Big) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})\big|_{l_0}^{T} \end{aligned}$$

Die finalisierte Form der Beziehung (C37) nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) ist nicht äquivalent zum Herleitungsergebnis dieser Arbeit für die nichtlineare Varianzenfortpflanzung gemäß (5.22), wie sich bereits mit der rechten oberen Hälfte der ersten n,n-Submatrix im mittleren Term

$$vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big) * \Big(vec\Big(diag\big(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\big)\Big)\Big)^T$$

der symmetrischen Form (5.22) in Gegenüberstellung mit der zugehörigen Submatrix im adäquaten Term

$$2 * \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$$

aus der ebenfalls symmetrischen Form (C37) zeigen lässt.

Die Elemente dieser Submatrix sind in ihrem oberen Teil einer Zelle als Herleitungsergebnis dieser Arbeit (5.22) und ihrem unteren Teil der Zelle als Realisierung von (C37) angegeben.

Tab. (A.5.4.1) Elemente der rechten oberen Hälfte der ersten n,n-Submatrix aus mittlerem Term von (5.22) (jeweils oberer Tabellenzellenteil) und aus $2 * \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$ (jeweils unterer Tabellenzellenteil):

	σ_1^2	σ_{i1}	σ_{j1}	σ_{n1}
	(1)	(2)	(3)	(4)
σ_1^2	$3 * \sigma_1^4$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$
	$2 * \sigma_1^4$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{1n}$
σ_{i1}		σ_{1i}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$
		$2 * \sigma_1^2 * \sigma_i^2$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{in}$
σ_{j1}			σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$
			$2 * \sigma_1^2 * \sigma_j^2$	$2 * \sigma_1^2 * \sigma_{jn}$
σ_{n1}				σ_{1n}^2
				$2 * \sigma_1^2 * \sigma_n^2$

Die Beziehungen (5.22) und (C37) sind damit nicht äquivalent.

Zur Verifizierung bzw. Falsifizierung beider konkurrierender Ergebnisse sei die in der untersuchten Quelle vorgenommene Entwicklung zunächst nachgebildet.

A.5.4.1 Nachbildung der Entwicklung von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993)

Die Quelle GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) leitet die Kovarianzmatrix der Parameter 2. Ordnung $\boldsymbol{C_{xx}}(\mathbf{2})$ ausgehend von

- einer Taylorreihenentwicklung der vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ um den fixen Approximationsvektor $\boldsymbol{\xi_0} = \boldsymbol{x_0}$ und bis einschließlich zweitem Glied
- Beobachtungen $\boldsymbol{x}$ einer zunächst beliebigen Dichtefunktion und des Mittelwertvektors $\boldsymbol{\mu_x}$

her. Der konkrete Ansatz dafür lautet gemäß Beziehung (C33) und mit der vektorisierten Form der Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}$ gemäß (5.9c)

$$g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{\xi_0}) + \boldsymbol{J} * (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi_0}) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{H} * \big((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi_0}) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi_0})\big) \tag{C33}$$

und entspricht nach Subtraktion von $g(\boldsymbol{\xi_0}) = \boldsymbol{y_0}$ der Form (5.5c) für die Summe aus erstem und zweitem Glied der Reihenentwicklung für $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$ bzw. $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{l})$ mit

$\boldsymbol{l}$ = $\boldsymbol{x}$ (Zufallsvektor der Beobachtungen)

$\boldsymbol{l_0}$	$= \boldsymbol{x_0}$	(Approximationsvektor)
$f(\boldsymbol{l})$	$= g(\boldsymbol{x})$	(Zufallsvektor der Funktionen)
$E(\boldsymbol{l})$	$= \boldsymbol{\mu_x}$	(Mittelwertvektor)
$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$	$= \boldsymbol{J}$	(Jacobi-Matrix)
$\boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})$	$= \boldsymbol{H}$	(vektorisierte Form der Hesse-Matrix)
$\boldsymbol{C_{ll}}$	$= \boldsymbol{\Sigma}$	(Kovarianzmatrix der Beobachtungen)
$\boldsymbol{C_{xx}}$	$= \boldsymbol{D}\{\boldsymbol{y}\}$	(Kovarianzmatrix der Parameter, Dispersionsmatrix)

Beziehung (5.5c) ist mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - E\{\boldsymbol{l}\}$ (5.2) um den Mittelwertvektor $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{l})$ als Approximationsvektor reihenentwickelt. Für den Ansatz nach (C33) ist jedoch ein beliebiger Approximationsvektor $\boldsymbol{\xi_0}$ vorgesehen, so dass dort mit Berücksichtigung des Mittelwertvektors $\boldsymbol{\mu_x}$ gilt

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi_0} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x}) + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0}) = \big(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{l})\big) + (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{l_0}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}, \text{ mit } \boldsymbol{dl_0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{l_0}$$

In der Nomenklatur dieser Arbeit lässt sich (C33) nach Subtraktion von g($\boldsymbol{\xi_0}$) somit schreiben als

$$\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)$$

Entsprechend des Ansatzes (5.6a) gilt für die Parameterstochastik:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C_{xx}} = {} & E\{\boldsymbol{dx} * \boldsymbol{dx}^T\} \\
& = E\Bigg\{\Bigg(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)\Bigg) \\
& * \Bigg(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)\Bigg)^T\Bigg\} \\
& = E\Bigg\{\Bigg(\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)\Bigg) \\
& * \Bigg((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= E\{ & \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \\
& \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T \\
& \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \\
& \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{dl_0})\big)^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= E\{ & \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \big(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{dl_0^T} + \boldsymbol{dl_0} * \boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{dl_0} * \boldsymbol{dl_0^T}\big) * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \\
& \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \big(\boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{dl} * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + \boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{dl_0} * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{dl_0} * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + \boldsymbol{dl_0} * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{dl_0} * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T})\big) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T + \\
&\frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T + \\
&(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{dl_0^T} + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * \boldsymbol{dl_0^T} + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{dl_0^T} + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * \boldsymbol{dl_0^T}\big) * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \\
&\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \big((\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&\qquad * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + \\
&(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{dl_0}) \\
&\qquad * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + \\
&(\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&\qquad * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + \\
&(\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{dl_0^T}) + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) \\
&\qquad + (\boldsymbol{dl_0} \otimes \boldsymbol{dl_0}) * (\boldsymbol{dl_0^T} \otimes \boldsymbol{dl_0^T})\big) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T\Big\}
\end{aligned}
$$

(A.5.4.1)

Lediglich die in rot hervorgehobenen Terme finden sich in Beziehung (C35) der untersuchten Quelle (mit teilweise bereits aufgelösten Erwartungswerten):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{\Sigma_y} = \boldsymbol{J\Sigma J'} &+ \frac{1}{2}\boldsymbol{J} * [\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' \otimes \boldsymbol{\Sigma}]\boldsymbol{H'} \\
&+ \frac{1}{2}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0}) + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0}) \otimes \boldsymbol{\Sigma}]\boldsymbol{J'} \\
&+ \frac{1}{4}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})(\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})(\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' \otimes \boldsymbol{\Sigma} + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0}) \otimes \boldsymbol{\Sigma} \\
&\otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' \otimes \boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})]\boldsymbol{H'} + \frac{1}{2}\boldsymbol{J} \\
&* \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})'\}\boldsymbol{H'} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H} * \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x}) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})'\}\boldsymbol{J'} \\
&+ \frac{1}{4}\boldsymbol{H} \\
&* \big[\mathrm{E}\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})\} * (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' + (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0}) \\
&* E\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})'\} + (\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})) \\
&* E\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})\} + E\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x}) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})'\} \\
&* ((\boldsymbol{\mu_x} - \boldsymbol{\xi_0})' \otimes \boldsymbol{I})\big]\boldsymbol{H'} + \frac{1}{4}\boldsymbol{H} * \{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_x})'\} \\
&- \mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma}(\mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma})']\boldsymbol{H'} + \sigma_3^*
\end{aligned}
$$

(C35)

Aufgrund des Fehlens von insgesamt 20 Einzeltermen in (C35) sowie des dort auftretenden zusätzlichen Terms

$$-vec\boldsymbol{\Sigma} * (vec\boldsymbol{\Sigma})' = -vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T$$

welcher der bisherigen Nachbildung der Entwicklung von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) nicht entnehmbar ist, besteht bereits hier Inkonsistenz zwischen beiden Entwicklungen. Dies gilt auch für den Fall, dass die fehlenden Terme im Zuge der Wahl des Mittelwertvektors als Approximationsvektor sowie der Annahme (quasi-) normalverteilter Beobachtungen nullwertig würden, da diese Inkonsistenz auch alleine aus dem o.a. zusätzlichen Term resultieren würde und dieser mit $\boldsymbol{C_{ll}} \neq \boldsymbol{0}$ stets von Null verschieden ist.

Es fehlt ferner als formaler Mangel in der vorletzten Zeile von Beziehung (C35) vor der geöffneten geschweiften Klammer der Ausdruck

$$E[$$

dessen zugehöriger Term

$$-\frac{1}{4} * \boldsymbol{H} * E\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x}) * (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^T \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x}) * (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^T\} * \boldsymbol{H}'$$
$$= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

im genannten Falle einzig werttragend für die Anteile 2. Ordnung wird und den relevanten Mangel aufweist, im Erwartungswert (s. Anhang 5.7)

$$E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\} = \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$$

nicht äquivalent zum Erwartungswert

$$E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} = E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T)\}$$
$$= vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$$

des ansonsten gleichen Terms zu sein, aus dem er sich ursprünglich ergab, da beide Erwartungswerte auf unterschiedliche Ergebnisse führen. Die Äquivalenz von Termumformungen ist daher im Zuge des Übergangs auf (C35) in der untersuchten Entwicklung wenigstens im eben betrachteten werttragenden Term der Anteile 2. Ordnung verletzt worden.

Die Symbolik σ_3^* steht in (C35) stellvertretend für Terme dritter und höherer Ordnung.

Die Falsifizierung der Entwicklung von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) wird im Anhang 5.4.2 mit einer Betrachtung des Überganges von Beziehung (C35) auf (C37) fortgeführt und abgeschlossen.

Die weitere Nachbildung der Entwicklung von GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) setzt an Beziehung (A.5.4.1) an und führt die Annahme ein, dass als fixer Approximationsvektor $\boldsymbol{\xi_0}$ bzw. $\boldsymbol{l_0}$ der Mittelwertvektor $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l_0}$ gewählt werden kann und somit $\boldsymbol{dl_0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{l_0} = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{C}_{xx} = E\{\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\varepsilon} * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T) * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T\}$$

Mit der weiteren Annahme (quasi-) normalverteilter Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ gilt – den Ausführungen in Kapitel 5.3.6 zu den Erwartungswerten für Produktbildungen mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ und dem Kronecker-Produkt $\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ bei (quasi-) normalverteilten Beobachtungen folgend:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{xx} &= \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon}^T \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^T)\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T \\
&= \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * E\{(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})^T\} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T \\
&= \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C}_{ll} * \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) \\
&* \left(vec(\boldsymbol{C}_{ll}) * vec(\boldsymbol{C}_{ll})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right)\right. \\
&* \left.\left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T = \boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{1}) + \boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2})
\end{aligned}$$

Mit

$$\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2}) = \frac{1}{4} * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) * \left(vec(\boldsymbol{C}_{ll}) * vec(\boldsymbol{C}_{ll})^T + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C}_{ll})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D}_V^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T \tag{5.22}$$

Somit ist gezeigt, dass sich das Ergebnis dieser Arbeit für die Kovarianzmatrix der Parameter nach den Varianzanteilen 2. Ordnung ebenfalls anhand des in der untersuchten Quelle gewählten allgemeineren Entwicklungsansatzes mit ursprünglich nicht identischen Approximations- und Mittelwertvektoren sowie Beobachtungen beliebiger aber symmetrischer Dichteannahme findet, falls später die Identität beider Vektoren sowie (quasi-) normalverteilte Beobachtungen eingeführt werden.

A.5.4.2 Falsifizierung der Entwicklung nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993)

Das Ergebnis dieser Arbeit für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{xx}(\mathbf{2})$ ist anhand der im Anhang 5.4.1 geführten Nachweise gesichert. Beziehung (C35) der untersuchten Quelle steht dazu in dem im Anhang 5.4.1 gezeigten Widerspruch und ist daher bereits insofern falsifiziert.

Die Entwicklung wird in der untersuchten Quelle von Beziehung (C35) auf die obere Gleichung von Beziehung (C37) mit Einführung des Mittelwertvektors als Approximationsvektor sowie der Annahme (quasi-) normalverteilter Beobachtungen zunächst konsequent weiter geführt:

$$\boldsymbol{D}\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{\Sigma_y} = \boldsymbol{J\Sigma J}' - \frac{1}{4}\boldsymbol{H}\mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma}(\mathrm{vec}\boldsymbol{\Sigma})'\boldsymbol{H}' + \frac{1}{4}\boldsymbol{H} * \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})' \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})'\} * \boldsymbol{H}'$$
$$+ \sigma_3^* = \boldsymbol{J\Sigma J}' + \frac{1}{4}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma} + \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})' \otimes \boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\}] * \boldsymbol{H}' + \sigma_3^* \tag{C37}$$

Jeweils ohne Beachtung des Terms $\boldsymbol{J\Sigma J}' = \boldsymbol{C_{xx}}(\boldsymbol{1})$ für die Varianzenteile 1. Ordnung ergibt die obere Gleichung von (C37) mit der Identität (s. Anhang 5.7)

$$E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\} = \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$$

aufgelöst

$$-\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T +$$

$$\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \left(\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

$$= -\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T +$$

$$\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \left(2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

Die Auflösung der unteren Gleichung von (C37) ist in Anhang 5.4 gezeigt und ergibt

$$\frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

Die Differenz beider Ergebnisse ist den o.a. Darstellungen entnehmbar als

$$\frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T -$$

$$\left(-\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T +\right.$$

$$\left.\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \left(2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T\right)$$

$$= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T + \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T -$$

$$\frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \left(2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

$$= \frac{1}{4} * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l}) * \left(vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) - 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right.$$
$$\left. * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T\right) * \boldsymbol{D_V^2 f}(\boldsymbol{l})^T$$

Im Falle einer Äquivalenz beider Gleichungen wäre der Klammerterm gleich Null und es müsste gelten

$$vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T + (\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}) = 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$$

Da sich der Term $vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$ jedoch nur auf einige Hauptdiagonalenelemente der zugehörigen quadratischen Matrix auswirkt und sich die Terme $\boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$ und $vec(\boldsymbol{C_{ll}}) * vec(\boldsymbol{C_{ll}})^T$ wie in Anhang 5.4 gezeigt in ihren Elementen außerhalb der Hauptdiagonalen strukturell unterscheiden, kann die fehlende Äquivalenz von oberer und unterer Gleichung aus (C37) und so eine weitere Inkonsistenz in der Entwicklung nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) gezeigt werden, denn die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen der quadratischen Matrix auf der linken Gleichungsseite sind so im Gegensatz zu ihren Pendants der Matrix auf der rechten Gleichungsseite von Null verschieden, die zugehörige Gleichung nicht erfüllt und somit die Differenz zwischen der oberen und unteren Gleichung von (C37) ungleich Null.

Es ist daher nicht von einer durchgängigen Konsistenz innerhalb der betrachteten Herleitungsskizze für die Fehleranteile 2. Ordnung nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) auszugehen.

Beziehung (C37) zur nichtlinearen Varianzenfortpflanzung nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) ist aufgrund des Widerspruchs zum konsistenten Herleitungsergebnis dieser Arbeit (5.22) sowie aufgrund der fehlenden Konsistenz innerhalb der Herleitung der betrachteten Quelle falsifiziert und abzulehnen.

A.5.4.3 Falsifizierung der Verzerrungseffekte für eine skalare Beobachtung und einen skalaren Parameter nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993)

Die Falsifizierungen von drei auf eine skalare Beobachtung und einen skalaren Parameter bezogenen Verzerrungseffekten nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) sind nachfolgend gezeigt.

A.5.4.3.1 Falsifizierung des geometrischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger symmetrischer Dichtefunktion und beliebigem Approximationspunkt (C29)

Grundlegend ist hierfür die Taylorreihenentwicklung des Parameters x aus Beziehung (C28) der betrachteten Quelle (dort als $y = g(x)$ bezeichnet), welche für den allgemeinen Approximationspunkt $\xi_0 = l_0$ und der stochastischen beobachtungsbezogenen Größe $dl = l - l_0$ mit Beziehung (5.4a) dieser Arbeit übereinstimmt. Im Übergang auf Beziehung (C29) ist jedoch für die Bildung des parameterbezogenen Erwartungswertes $E\{x\}$ der Term 1. Ordnung $\left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl$ gleich Null angenommen worden, obwohl bis zu dieser Stelle noch keine Spezialisierung auf den Approximationspunkt als Mittelwert $\left(l_0 \neq E(l)\right)$ oder normalverteilte Beobachtungen vorgenommen wurde und daher noch $E\{dl\} = E\{l - l_0\} \neq E\{l - E(l)\} = 0$ gelten muss. Darüber hinaus ist im Übergang auf Beziehung (C29) unzulässigerweise bereits der sich aus diesen Spezialisierungen ergebende Erwartungswert σ_l^2 der Form $E\{dl^2\} = E\{\varepsilon^2\}$ eingesetzt worden.
Die sich aus (C29) unter der Annahme dieser Spezialisierungen ergebende Identität (C31) ist jedoch korrekt und enthält im zweiten Term den entsprechenden Parameterbias 2. Ordnung gemäß Beziehung (5.16) dieser Arbeit auf der rechten Gleichungsseite.

A.5.4.3.2 Falsifizierung des stochastischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger symmetrischer Dichtefunktion und beliebigem Approximationspunkt (C30)

Der hier betrachtete stochastische Verzerrungseffekt wird mit seinen Varianzanteilen 1. und 2. Ordnung als Streuung $\sigma_x^2(1+2)$ des Parameters x über den Ansatz $\sigma_x^2(1+2) = E\{dx * dx^T\}$ mit dx gemäß (5.4b) erhalten zu

$$\sigma_x^2(1+2) = \sigma_x^2 = E\left\{\left(\left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl + \frac{1}{2!} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * dl^2\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left(\left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl\right)^2 + \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * dl * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * dl^2 + \frac{1}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * dl^2\right)^2\right\}$$

$$\sigma_x^2(1+2) = \left(\left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0}\right)^2 * E\{dl^2\} + \left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0} * \left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0} * E\{dl^3\} + \frac{1}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0}\right)^2 * E\{dl^4\} \qquad \text{(A.5.4.2)}$$

Die zugehörige Beziehung (C30) der betrachteten Quelle enthält zwar die drei Summanden von σ_x^2 aus Beziehung (5.23), aber außerdem drei weitere Terme und weicht somit von der korrekten Darstellung von σ_x^2 ab. Ferner ist im Übergang auf Beziehung (C30) unzulässigerweise bereits der sich aus den

vorgenannten Spezialisierungen ergebende Erwartungswert σ_l^2 der Form $E\{dl^2\} = E\{\varepsilon^2\}$ im ausschließlich auf die 1. Ordnung bezogenen Anteil eingesetzt worden.

A.5.4.3.3 Falsifizierung des stochastischen Verzerrungseffekts nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) für eine skalare Funktion mit einer skalaren normalverteilten Beobachtung und mittelwertigem Approximationspunkt (C32)

Die hierfür geltenden Spezialisierungen führen auf die Erwartungswerte $E\{\varepsilon^2\} = \sigma_l^2$, $E\{\varepsilon^3\} = 0$ und $E\{\varepsilon^4\} = 3 * \sigma_l^4$ und somit ausgehend von Beziehung (5.23) auf

$$\sigma_x^2 = \left(\left.\frac{\partial x}{\partial l}\right|_{l_0}\right)^2 * \sigma_l^2 + \frac{3}{4} * \left(\left.\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right|_{l_0}\right)^2 * \sigma_l^4 \qquad \text{(A.5.4.3)}$$

Die zugehörige Beziehung (C32) der betrachteten Quelle enthält zwar den ersten Summand, weicht jedoch im Koeffizienten des zweiten Summanden mit $\frac{1}{2}$ statt $\frac{3}{4}$ ab und ist daher als nicht korrekt zurückzuweisen.

A.5.5 Quantifizierung von Nichtlinearität und Verzerrung in nichtlinearen L2-Norm-Schätzungen nach TEUNISSEN (1989)

Der Inhalt des Anhangs 5.5 gibt die Quelle TEUNISSEN (1989) übersetzt und sinnvoll gekürzt wieder. Eigene Ergänzungen dazu sind grau unterlegt dargestellt.

Anmerkung zur Bias- bzw. Fehlerbezeichnung:
Die hier betrachtete Quelle TEUNISSEN (1989) verwendet die Bezeichnung $b_{\tilde{l}}$ einheitlich sowohl für einen Beobachtungsbias 1. oder 2. Ordnung als auch für einen deterministisch-systematischen Fehleranteil $\nabla_{\tilde{l}}$. Zur genaueren Unterscheidung wird aber im Rahmen jener Wiedergabe für deterministisch-systematische Fehleranteile die originale Bezeichnung $b_{\tilde{l}}$ durch $\nabla_{\tilde{l}}$ ersetzt.

A.5.5.1 Einleitung und Zielsetzung

In der Geodäsie sind nahezu alle relationalen Zusammenhänge zwischen den Beobachtungen und dem Parameterraum nicht linear. Ein lineares Modell zur Abbildung der Beobachtungen auf die gesuchten Parameter liegt lediglich für das reine geometrische Nivellement vor. Für geodätische Schätzer wirft dies die Frage nach der grundsätzlichen Kompatibilität angewendeter linearisierter Modellbildungen mit dem konkreten, nichtlinearen relationalen Modell nach (5.1) auf.
Obwohl die meisten nichtlinearen Modelle lediglich eine gering ausgeprägte Nichtlinearität aufweisen, ergibt sich aus dem Kompatibilitätsproblem die Notwendigkeit, ein Maß für diese Nichtlinearität der nichtlinearen Modelle und Methoden zur Prüfung auf eine ausreichende Näherung der linearisierten Modelle zu finden.
Dafür ist die Ermittlung der Auswirkung der Nichtlinearität auf die Eigenschaften der Dichte- und Verteilungsfunktion dieser nichtlinearen Modelle (Schätzer) ein möglicher Ansatz.
Alle Ableitungen und Formelbeziehungen des Anhangs 5.5 basieren auf dem nicht überbestimmten Fall der Varianzenfortpflanzung.

A.5.5.2 Bestimmung der Verteilungseigenschaften nichtlinearer Schätzer

Sei $\boldsymbol{l}$ eine vektorielle Zufallsvariable der Beobachtungen und $f = f(\boldsymbol{l})$ eine nichtlineare Funktion im Sinne eines Modells zur Umformung der Beobachtungen in den Parameterraum $\underline{\boldsymbol{x}}$, so liegen folgende Methoden zur Bestimmung der Verteilungseigenschaften von f vor, welche jedoch aus verschiedenen Gründen nur sehr eingeschränkt praktisch anwendbar sind und in dieser Zusammenstellung nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erfüllen:

A.5.5.2.1 Monte-Carlo-Methode

Die Aufstellung der Verteilungseigenschaften von f erfolgt empirisch anhand stochastischer Resultate für den Parameterraum, welche sich aus der Mittelung verschiedener Situationen zufällig verteilter Beobachtungen ergeben. Diese Methode hat den Vorteil einer besonderen Eignung für nichtlineare

Relationen zwischen Beobachtungen und gesuchten Parametern und den Nachteil einer fehlenden Möglichkeit zur geschlossenen Formeldarstellung.

A.5.5.2.2 Asymptotische Theorie

Unter der Voraussetzung einer großen Anzahl von Beobachtungen werden die Eigenschaften nichtlinearer Schätzer – insbesondere die Verteilungsfunktion der nichtlinearen Abbildung f – ermittelt. Bei zusätzlich nur geringen Schätzfehlern werden besondere mathematische Vereinfachungen ebenso wie klassische Grenzwertbetrachtungen (z.B. $l_{i \to \infty}$) möglich. Infolge der Voraussetzung einer großen Anzahl an Beobachtungen ($l_{i \to \infty}$) können jedoch die Anforderungen an praktische Anwendungen nur eingeschränkt erfüllt werden.

A.5.5.2.3 Theorie der Zusammenhänge zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion

Es besteht die grundsätzliche Randbedingung der Einführung geeigneter Taylorreihenentwicklungen, falls die Anwendung der exakten Methoden dieser Theorie in einem speziellen Problemfall unmöglich sein sollte.

a) Für die erste Methode sind die Dichtefunktion $p_{\underline{l}}(\boldsymbol{l})$ der Ausgangsgrößen (Beobachtungen $\underline{\boldsymbol{l}}$) und das nichtlineare Modell bzw. die nichtlineare Abbildung $f(\boldsymbol{l})$ gegeben und die Verteilungsfunktion $P_{\underline{x}}(\boldsymbol{x})$ von $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{l})$ gesucht. Für deren kumulative Form gilt (mit $Prob$ = Wahrscheinlichkeit):

$$P_{\underline{x}}(\boldsymbol{x}) = Prob(\underline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{x}) = Prob(f(\underline{\boldsymbol{l}}) \leq \boldsymbol{x}) = \int_{(l|f(l) \leq x)} p_{\underline{l}}(\boldsymbol{l}) * dl \qquad \text{(A.5.5.1)}$$

Nachteilig ist, dass die gewünschte Wahrscheinlichkeit (Verteilungsfunktion) $P_{\underline{x}}(\boldsymbol{x})$ nicht für jedes $\boldsymbol{x}$ einfach ermittelbar ist.

b) Für die zweite Methode ist die Dichtefunktion $p_{\underline{x}}(\boldsymbol{x})$ der gesuchten Parameter $\boldsymbol{x}$ gegeben, welche sich unter bestimmten Bedingungen für die Abbildungsfunktion f abhängig von der Dichtefunktion $p_{\underline{l}}(\boldsymbol{l})$ der Ausgangsgrößen $\boldsymbol{l}$ darstellen lässt:

$$p_{\underline{x}}(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{\underline{l}}(f^{-1}(\boldsymbol{x}))}{\delta_l f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))} \qquad \text{(A.5.5.2)}$$

Nachteilig ist die Notwendigkeit der Inversen $f^{-1}(\boldsymbol{x})$ der nichtlinearen Abbildungsfunktion f.

c) Die dritte Methode sucht nach speziellen Momenten der Verteilung von $f(\boldsymbol{l})$, z.B. dem Mittelwert $E\{f(\boldsymbol{l})\}$ und der Varianz $Var\{f(\boldsymbol{l})\}$ von $f(\boldsymbol{l})$:

$$E\{f(\boldsymbol{l})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{l}) * p_l(\boldsymbol{l}) * dl \qquad \text{(A.5.5.3a)}$$

$$Var\{f(\boldsymbol{l})\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(\boldsymbol{l}) - E\{f(\boldsymbol{l})\})^2 * p_l(\boldsymbol{l}) * dl \qquad \text{(A.5.5.3b)}$$

Nachteilig ist die im Allgemeinen sehr hohe Komplexität der zugehörigen Berechnungen, welche in hohem Maße von der Natur von f und p_l abhängt und für den multivariaten Fall – mit $\boldsymbol{l}$ als Vektor – besonders ausgeprägt ist.

A.5.5.3 Verzerrung nichtlinearer Schätzungen

Betrachtet sei die allgemeine Verzerrung b_x eines beliebigen nichtlinear geschätzten Parameters $\underline{x}$. Grundlage dafür ist die Aufstellung eines Näherungswertes x_0 für den Mittelwert x über eine Taylorreihenentwicklung für $x_0 = f(\boldsymbol{l_0})$ bis einschließlich zweitem Reihenglied:

$$x_0 = f(\boldsymbol{l_0}) = f(\boldsymbol{l}) + \boldsymbol{\delta_l f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l}) + \frac{1}{2} * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l})^T * \boldsymbol{\delta_{ll}^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l}) \qquad \text{(A.5.5.4a)}$$

Mit den nachfolgend verwendeten Bezeichnungen

$\boldsymbol{\delta_l f}(\boldsymbol{l})$ = $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l})$ (Jacobi-Matrix der 1. Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen)

$\boldsymbol{\delta_{ll}^2 f}(\boldsymbol{l})$ =$\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})$ (Hesse-Matrix der 2. Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen)

lässt sich Gleichung (A.5.5.4a) mit $\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a) auch schreiben als

$$x_0 = f(\boldsymbol{l}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l}) + \frac{1}{2} * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l})^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l}) \qquad \text{(A.5.5.4b)}$$

Auf dieser Grundlage erfolgt mit Einführung von $(\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l})$ als Summe der beobachtungsbezogenen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}$ (stochastisch) und $\boldsymbol{\nabla_l}$ (systematisch) – kontrastierend zur Einführung von $(\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l})$ als rein stochastische Größe an gleicher Stelle in Kapitel 5.5.1 – die Ermittlung der parameterbezogenen Verzerrung (als *Bias* b_x)

$$b_x = f(E\{\boldsymbol{l}\}) - E\{f(\boldsymbol{l})\} \qquad \text{(A.5.5.5a)}$$

zu $b_x = 0$ für den Fall eines unverzerrt (*unbiased*) und damit erwartungstreu geschätzten Parameters $E\{f(\boldsymbol{l})\} = f(E\{\boldsymbol{l}\})$ und für den allgemeinen Fall mit den Verzerrungsanteilen 1. und 2. (1+2) Ordnung und mit $\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a) zu (mit $spur$ = Spur des Matrixarguments)

$$b_x(1+2) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l}) * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\nabla_l}) + \frac{1}{2} * spur\left(\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C_{ll}}\right) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{\nabla_l^T} * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{\nabla_l} \qquad \text{(A.5.5.5b1)}$$

Dabei wird die Herleitung von Beziehung (A.5.5.5b1) über den Ansatz zur Ermittlung der Stochastik 1. und 2. Ordnung für vektorwertige Funktionen mit vektorwertigen beliebig verteilten Beobachtungen eines beliebigen, nicht erwartungswertgleichen Approximationsvektors gemäß Beziehung (A.5.4.1), jedoch unter Beachtung der speziellen Bedingungen für die Normalverteilung sowie spezialisiert auf eine skalare Funktion, geführt. Der beobachtungsbezogene Anteil $\boldsymbol{\nabla_l}$ entsteht infolge der Abweichung des Approximationsvektors vom Mittelwertvektor der Beobachtungen als beobachtungsbezogener Nichtzentralitätsparameter.

Die Abweichung $\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l}$ einer Beobachtung $\boldsymbol{l}$ von ihrem nicht zwingend wahren Wert $\boldsymbol{l_0}$ ist so formal in Form einer auf den Beobachtungsraum bezogenen Verzerrung eingeführt worden zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\nabla_l} = \boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l} \tag{A.5.5.6}$$

Die Art der im dritten Term $\frac{1}{2} * \boldsymbol{\nabla_l^T} * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{\nabla_l}$ in Beziehung (A5.5.5b1) von TEUNISSEN (1989) vorgenommenen Produktbildung führt stets auf einen 1x 1 Vektor bzw. einen Skalar, so dass die Beziehung (A.5.5.5b1) in dieser Form im Parameterraum lediglich skalarwertig ist. Die zugehörige vektorwertige Form für (A.5.5.5b1) ergibt sich anhand der Einführung der vektorwertigen Formen für den zweiten und dritten Term mit $\boldsymbol{D_V^2 f(l)}$ gemäß (5.9c)

$$\boldsymbol{b_x(2)} = \frac{1}{2} * \left(\boldsymbol{D_V^2 f(l)} * vec(\boldsymbol{C_{ll}})\right) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)} * (\boldsymbol{\nabla_l} \otimes \boldsymbol{\nabla_l}) \tag{A.5.5.5c}$$

als deterministisch-systematisch induzierter Parameterbias 1. und 2. Ordnung $\boldsymbol{b_x(1+2)}$ zu

$$\boldsymbol{b_x(1+2)} = \boldsymbol{Df(l)} * (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\nabla_l}) + \frac{1}{2} * \left(\boldsymbol{D_V^2 f(l)} * vec(\boldsymbol{C_{ll}})\right) + \frac{1}{2} * \boldsymbol{D_V^2 f(l)} * (\boldsymbol{\nabla_l} \otimes \boldsymbol{\nabla_l}) \tag{A.5.5.5b2}$$

Der erste Term von (A.5.5.5b1) bzw. (A.5.5.5b2) bildet den Anteil des Parameterbias 1. Ordnung $b_x(1)$ bzw. $\boldsymbol{b_x(1)}$ gemäß Beziehung (5.27b).

Dabei gilt für den Übergang auf die vektorwertige Form des zweiten Terms in (A.5.5.5b1):

Mit $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} = \boldsymbol{C_{uu}^{-1}}$, $\boldsymbol{C_{ll}} = \boldsymbol{C_{\nabla u \nabla u' stoch}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla u_{stoch}}$ ergibt sich aus der Identität des Anhangs 2.3 $spur\left(\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{C_{ll}}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{\varepsilon}$ und mit (5.12) weiter $\boldsymbol{\varepsilon}^T * \boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D_V^2 f(l)} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})$. Mit der Erwartungswertform $E\{\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}\} = vec(\boldsymbol{C_{ll}})$ gilt dann $\boldsymbol{D_V^2 f(l)} * (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{D_V^2 f(l)} * vec(\boldsymbol{C_{ll}})$ und somit schließlich $spur\left(\boldsymbol{D_Q^2 f(l)} * \boldsymbol{C_{ll}}\right) = \boldsymbol{D_V^2 f(l)} * vec(\boldsymbol{C_{ll}})$.

Für den Übergang auf die vektorwertige Form des dritten Terms in (A.5.5.5b1) gilt Beziehung (5.12) mit $\boldsymbol{\nabla_l}$ anstelle $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Für den nicht überbestimmten Fall einer beliebigen aber identischen Anzahl von Beobachtungen und Parametern stellen alle drei Terme in (A.5.5.5b2) additionskompatible Spaltenvektoren dar.

Die parameterbezogene deterministisch-systematisch induzierte Verzerrung b_x ist gemäß Beziehung (A.5.5.5b1) bzw. (A.5.5.5b2) als Parameterbias für die 1. Ordnung $b_x(1)$ abhängig von

- der beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Verzerrung $\boldsymbol{\nabla_l}$
- dem zufälligen beobachtungsbezogenen Fehleranteil $\boldsymbol{\varepsilon}$

und für die 2. Ordnung $b_x(2)$ zusätzlich von

- den beobachtungsbezogenen Genauigkeiten in Form der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{ll}}$
- der Nichtlinearität der Abbildungsfunktion f

und lässt sich für die 2. Ordnung auch als ein Maß für die Auswirkung der Nichtlinearität von f auf die gesuchten Parameter bzw. Zielgrößen $\boldsymbol{x}$ interpretieren. Dabei sind alle drei auf den Parameterbias $b_x(2)$ bzw. $b_x(1+2)$ Einfluss nehmenden Größen grundsätzlich voneinander unabhängig.

Analog zur Reihenentwicklung der Beziehung (A.5.5.4b) der Zielgröße x_0 nach den Residuen $(\boldsymbol{l_0} - \boldsymbol{l})$ bzw. Verzerrungen des Beobachtungsraumes lässt sich prinzipiell auch umgekehrt der Erwartungswert einer Beobachtung $E\{l\}$ als Ausgangsgröße nach den Residuen der Zielgrößen aus (A.5.5.5a) mit Termen bis einschließlich 2. Ordnung reihenentwickeln, aus denen sich als Vergleichsgröße wiederum ein allgemeines Eigenwertproblem zur Netzverzerrung mit den Termen bis einschließlich 1. Ordnung als Referenzgröße und bezogen auf den Beobachtungsraum herleiten lässt.

A.5.5.4 Quantifizierung der Nichtlinearität der Beobachtungsgleichungen

Die Verzerrungen in nichtlinearen Schätzungen nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate (L2-Norm) finden ihre Ursache in der Nichtlinearität der Beobachtungsgleichungen

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{x}\} = f(\boldsymbol{l}) \tag{A.5.5.7a}$$

welche das zwischen den Beobachtungen und den Zielgrößen bestehende originale relationale Modell aus Beziehung (A.5.5.7a) in einer linearisierten und differentialisierten $(\Delta\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{x})$ Form abbilden zu

$$\boldsymbol{E}\{\Delta\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{l_0}) * \Delta\boldsymbol{l} \tag{A.5.5.7b}$$

Die parameterbezogenen Genauigkeiten $\boldsymbol{C_{xx}}$ ergeben sich daraus für die originale nichtlineare Form zu

$$\boldsymbol{C_{xx}} = E\{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{x}\}) * (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{x}\})^T\} \tag{A.5.5.8a}$$

und entsprechend für die linearisierte Form zu

$$\boldsymbol{C_{xx}} = E\{(\Delta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{E}\{\Delta\boldsymbol{x}\}) * (\Delta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{E}\{\Delta\boldsymbol{x}\})^T\} \tag{A.5.5.8b}$$

Das im Parameterraum stets verbleibende Residuum zwischen dem Ergebnis der L2-Norm-Schätzung $E\{f(\boldsymbol{l_0})\} = E\{f(\boldsymbol{l})\}$ und dem wahren (Stichproben-) Ergebnis $f(E\{\boldsymbol{l}\})$ ist also linearisierungsbedingt und daher als Restglied 2. Ordnung $R_2(\boldsymbol{l})$ und gleichermaßen Bias mit $\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a)

$$R_2(\boldsymbol{l}) = \frac{1}{2} * \Delta \boldsymbol{l}^T * \boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l}) * \Delta \boldsymbol{l} \tag{A.5.5.9}$$

im Kollektiv mit seinen Grenzwerten zur Quantifizierung der Nichtlinearität geeignet; für ein originär lineares Modell f ist wegen fehlender Linearisierungen $R_2(\boldsymbol{l}) = 0$ und $f(E\{\boldsymbol{l}\}) = E\{f(\boldsymbol{l})\}$. Die L2-Norm-Anwendung sollte daher in diesem Fall bereits mit der ersten Iteration das endgültige Ergebnis liefern.

Es ergeben sich aus der Betrachtung von $R_2(\boldsymbol{l})$ nach (A.5.5.9) folgende Momente zur Quantifizierung der Nichtlinearität:

a) Obergrenze für $R_2(\boldsymbol{l})$ aus den Beobachtungsgleichungen durch Auswertung der Einzelelemente der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})$:

$$\left|R_2^i(\boldsymbol{l})\right| \leq \frac{c^i}{2} * n * \left||\Delta \boldsymbol{l}|\right|^2, \quad \text{falls } \left|\boldsymbol{D_{jk}^2} f^i(\boldsymbol{l})\right| \leq c^i \text{mit}_{\substack{i = 1, \dots, u \text{ (Parameter)} \\ j,k = 1, \dots n \text{ (Beobachtungen)}}} \tag{A.5.5.10}$$

Die Erzeugung der benötigten Skalare c^i gelingt üblicherweise auf relativ einfachem Wege. Nachteilig ist die für große Netze zu pessimistische Größenordnung dieser Obergrenze.

b) Unter- und Obergrenze für $R_2(\boldsymbol{l})$ auf der Basis extremaler Eigenwerte λ der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_Q^2 f}(\boldsymbol{l})$:

$$\frac{1}{2} * \lambda_{min}^i * \left||\Delta \boldsymbol{l}|\right|^2 \leq R_2^i(\boldsymbol{l}) \leq \frac{1}{2} * \lambda_{max}^i * \left||\Delta \boldsymbol{l}|\right|^2, \qquad \text{mit } i = 1, \dots, u \text{ (Parameter)} \tag{A.5.5.11}$$

c) Mittelwert für $R_2(\boldsymbol{l})$:

$$E\{R_2^i(\boldsymbol{l})\} = \frac{1}{2} * spur\left(\boldsymbol{D^2 f}(\boldsymbol{l}) * \boldsymbol{C_{ll}}\right), \qquad \text{mit } i = 1, \dots, u \text{ (Parameter)} \tag{A.5.5.12}$$

A.5.5.5 Geometrische Verzerrung der aus den Zielgrößen L2-Norm-geschätzten Ausgangsgrößen

Es sei $\boldsymbol{l} = \hat{l}(\boldsymbol{x})$ die linearisierte L2-Norm-Schätzung der ursprünglichen Ausgangsgröße $\boldsymbol{l}$ aus der ursprünglichen Zielgröße $\boldsymbol{x}$. Gesucht sei eine Näherung für die L2-Norm-bezogene (geometrische) Verzerrung der 2. Ordnung $\boldsymbol{b_{\tilde{l}}}(\boldsymbol{2}) = E\{\boldsymbol{l}\} - \boldsymbol{l} = E\{\hat{l}(\boldsymbol{x})\} - \hat{l}(E\{\boldsymbol{x}\})$.

Es bestehe für die umgekehrte Abbildungsrichtung von $\boldsymbol{l}$ auf den Zufallsvektor $\boldsymbol{x}$ das bereits bekannte und zu $\hat{l}$ gegensinnige nichtlineare Modell $E\{\boldsymbol{x}\} = f(\boldsymbol{l})$ nach (A.5.5.7a), das sich durch Anwendung

des Modells $\hat{l}$ wegen der Gegensinnigkeit von $\hat{l}$ und f mit Beachtung beider Seiten der Gleichung (A.5.5.7a) entwickeln lässt zu

$$\hat{l}(E\{\boldsymbol{x}\}) = \hat{l}\big(f(\boldsymbol{l})\big) = \boldsymbol{l} \tag{A.5.5.13}$$

Gegenüber dem ursprünglichen relationalen Zusammenhang zwischen Beobachtungs- und Parameterraum $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{l})$ hat in (A.5.5.13) eine formale Vertauschung von Ausgangs- und Zielgrößen stattgefunden. Die Verzerrung $\boldsymbol{b}_{\tilde{l}}(\mathbf{2})$ der L2-Norm-geschätzten Größe $\boldsymbol{l}$ ergibt sich wegen der Nichtlinearität der Abbildungsfunktion $f(\boldsymbol{l})$ bzw. $\hat{l}(\boldsymbol{x})$ sowie der Genauigkeiten der Größen $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{x}$ als Fehleranteile 2. Ordnung für $\boldsymbol{l} = \hat{l}(E\{\boldsymbol{x}\})$ zu

$$\boldsymbol{b}_{\tilde{l}}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{Q}_{ll} * \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})^T * \boldsymbol{Q}_{xx}^{-1} * \boldsymbol{b}_x(\mathbf{2}) \tag{A.5.5.14a}$$

mit dem Bias 2. Ordnung für den i-ten Parameter

$$b_{x_i}(2) = -\frac{1}{2} * spur\big(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})_i * \boldsymbol{C}_{ll}\big) \tag{A.5.5.14b}$$

und mit $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a).

Die Berechnung der auf die Ausgangsgrößen $\boldsymbol{l}$ bezogenen Verzerrung $\boldsymbol{b}_{\tilde{l}}(\mathbf{2})$ u.a. anhand der auf die Zielgrößen $\boldsymbol{x}$ bezogenen Verzerrung $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{2})$ bildet über jene Vertauschung den zu (A.5.5.5b1) bzw. (A.5.5.5b2) aus Anhang 5.5.3 für die Größen $\boldsymbol{b}_{\tilde{l}}(\mathbf{2})$ und $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{2})$ umgekehrten Zusammenhang ab; jene beiden Größen stehen daher über die L2-Norm-Schätzung prinzipiell im relationalen Zusammenhang und induzieren sich dadurch gegenseitig.

A.5.5.6 Stochastische Verzerrung des L2-Norm-geschätzten parameterbezogenen Residuenvektors

Die Verzerrung des nach der L2-Norm geschätzten parameterbezogenen Residuenvektors definiert sich linearisierungsbedingt als dessen Varianzanteile 2. Ordnung und ergibt sich zu

$$\boldsymbol{b}_{\tilde{e}} = -\frac{1}{2} * \sigma^2 * \sum_{j=1}^{n-u} \boldsymbol{n}_j * \sum_{i=1}^{u} k_{n_j}^i, \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, u \text{ (Parameter)} \\ j = 1, \dots n-u \text{ (Beobachtungen)} \end{array} \tag{A.5.5.15}$$

mit den Eigenwerten k_{n_j} aus dem allgemeinen Eigenwertproblem und mit $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})$ gemäß (5.9a)

$$\left|\boldsymbol{n}_j^T * \boldsymbol{Q}_{xx}^{-1} * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Q}}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l}) - \lambda * \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1}\right| = 0 \tag{A.5.5.16}$$

Die Verzerrung $\boldsymbol{b}_{\tilde{e}}$ hängt daher von folgenden Größen ab:

- À-priori-Varianz der Gewichtseinheit σ^2
- Nullraumvektoren $\boldsymbol{n_j}$ der Matrix $\boldsymbol{Df(l)}$ der ersten Ableitungen der gesuchten Parameter $\boldsymbol{x}$ nach den Beobachtungen $\boldsymbol{l}$
- Zu $\boldsymbol{n_j}$ gehörige Eigenwerte k_{n_j}

A.5.5.7 Skalare Quantifizierung der Verzerrung

Skalare stellen eine Möglichkeit zur kompakten Quantifizierung der auf der Linearisierung nichtlinearer Modelle bzw. nichtlinearer Abbildungsfunktionen beruhenden Verzerrung dar.

Dabei lauten die geometrischen, auf die Beobachtungen bezogenen Verzerrungsanteile

$$\left|\left|\boldsymbol{b_{\tilde{l}}}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{ll}}} = \left|\left|\boldsymbol{P_{Df(l)}} * \boldsymbol{b_x}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} \tag{A.5.5.17a}$$

und die stochastischen, auf die Parameter bezogenen Verzerrungsanteile

$$\left|\left|\boldsymbol{b_{\tilde{e}}}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} = \left|\left|\boldsymbol{P^{\perp}_{Df(l)}} * \boldsymbol{b_x}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} \tag{A.5.5.17b}$$

Mit den Nullraumvektoren $\boldsymbol{n_j}$ $(j = 1, \dots, n-u)$ als orthonormale Basis des orthogonalen Komplements zum Rangraum von $\boldsymbol{Df(l)}$ ergibt sich der in (A.5.5.17b) enthaltene Projektor $\boldsymbol{P^{\perp}_{Df(l)}}$ zu

$$\boldsymbol{P^{\perp}_{Df(l)}} = \sum_{j=1}^{n-u} \boldsymbol{n_j} * \boldsymbol{n_j^T} * \boldsymbol{Q_{xx}^{-1}} \tag{A.5.5.18a}$$

und aufgrund der Orthogonalität von $\boldsymbol{P^{\perp}_{Df(l)}}$ zu $\boldsymbol{P_{Df(l)}}$ aus (A.5.5.17a) weiter

$$\boldsymbol{P_{Df(l)}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P^{\perp}_{Df(l)}}, \text{ mit } \boldsymbol{I} = \text{Einheitsmatrix} \tag{A.5.5.18b}$$

Es zeigt sich, dass die Verzerrungsanteile der Beobachtungen $\boldsymbol{b_{\tilde{l}}}$ durch die tangentiale Komponente der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2_Q f(l)}$ von $\boldsymbol{Df(l)}$ und die Verzerrungsanteile der Parameter $\boldsymbol{b_{\tilde{e}}}$ durch die normale Komponente dieser Matrix bestimmt werden.

Man erhält globale Obergrenzen für die Verzerrungsanteile aus (A.5.5.17a) und (A.5.5.17b) zu

$$\left|\left|\boldsymbol{b_{\tilde{l}}}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{ll}}} \leq \left|\left|\boldsymbol{b_x}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} \tag{A.5.5.19a}$$

$$\left|\left|\boldsymbol{b_{\tilde{e}}}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} \leq \left|\left|\boldsymbol{b_x}\right|\right|^2_{\boldsymbol{Q_{xx}}} \tag{A.5.5.19b}$$

Auf die Einzelbeobachtung j individualisierte Obergrenzen ergeben sich für die in Beziehung (A.5.5.17a) abgebildeten geometrischen Verzerrungsanteile der Beobachtungen über die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung zu

$$\left|b_{\tilde{l}}^{j}\right| \leq \sigma_{\tilde{l}j} * \left|\left|b_{\tilde{l}}\right|\right|_{Q_{ll}} \leq \sigma_{\tilde{l}j} * \left|\left|b_{x}\right|\right|_{Q_{xx}}, \text{ mit } j = 1, \dots, n \text{ (Beobachtungen)} \quad \text{(A.5.5.20a)}$$

Auf den Einzelparameter i individualisierte Obergrenzen ergeben sich für die in (A.5.5.17b) abgebildeten stochastischen Verzerrungsanteile der Parameter auf dieselbe Weise zu

$$\left|b_{\tilde{\tilde{e}}}^{i}\right| \leq \sigma_{\tilde{\tilde{e}}i} * \left|\left|b_{\tilde{\tilde{e}}}\right|\right|_{Q_{xx}} \leq \sigma_{\tilde{\tilde{e}}i} * \left|\left|b_{x}\right|\right|_{Q_{xx}}, \text{ mit } i = 1, \dots, u \text{ (Parameter)} \quad \text{(A.5.5.20b)}$$

A.5.5.8 Fazit zur Quantifizierung von Nichtlinearitätseffekten

TEUNISSEN (1989) zeigt Möglichkeiten zur Quantifizierung von Nichtlinearität und Verzerrung in nichtlinearen Schätzungen nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate (L2-Norm-Schätzung) auf, da in der Geodäsie fast ausschließlich nichtlineare Modelle zur Umformung der Beobachtungen auf die gesuchten Parameter vorliegen und diese Modelle für die Anwendung von L2-Norm-Schätzungen linearisiert sein müssen. Die sich daraus für die Beobachtungen und insbesondere die Parameter ergebende Verzerrung (*Bias*) ist für erwartungstreue Schätzungen – also ohne den Einfluss beobachtungsbezogener deterministisch-systematischer Fehleranteile – hauptsächlich vom Grad der Nichtlinearität des originären Modells aber auch von den À-priori-Genauigkeiten der Beobachtungen abhängig, aber grundsätzlich durch diese Nichtlinearität induziert. Aus diesem Grunde bilden die in konventionellen Ausgleichungen vernachlässigten Anteile 2. Ordnung als linearisierungsbedingte Residuen die Basis der Quantifizierung von Nichtlinearität und Verzerrung.

Es wird die Fortpflanzung von beobachtungsbezogenen Varianzanteilen (als zufällige Fehleranteile) sowie von beobachtungsbezogenen deterministisch-systematischen Fehleranteilen (als Beobachtungsbias $\boldsymbol{b_l}$) zum Parameterbias für die 1. und 2. Ordnung $b_x(1+2)$ in nichtlinearen Modellen einer skalaren Funktion mit vektorwertigen normalverteilten Beobachtungen gezeigt. Dabei bestehen für den durch beobachtungsbezogene deterministisch-systematische Fehleranteile $\boldsymbol{\nabla_l}$ induzierten Parameterbias für die 2. Ordnung $b_x(2)$ zusätzliche Abhängigkeiten zu den Genauigkeiten der Beobachtungen (Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C_{ll}}$) sowie zur Nichtlinearität der Abbildungsfunktion f (Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2 f(l)}$).

Die aufgezeigten Quantifizierungsansätze stützen sich z.B. auf die Bestimmung oder Betrachtung der Verteilungseigenschaften der das Modell realisierenden Abbildungsfunktion $f(\boldsymbol{l})$, die Entwicklung der Parameter nach einer Taylorreihe bis einschließlich zweitem Reihenglied oder die Anwendung des allgemeinen Eigenwertproblems mit Beteiligung der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)}$.

Die Quantifizierungsergebnisse stellen sich dabei entweder in vektorieller, auf die Beobachtungen oder

die Parameter bezogener Form oder in kompakter Weise als Skalar dar. Für beide Formen werden Ober- und Untergrenzen gezeigt, wie im Falle des stochastisch induzierten, also auf eine erwartungstreue (unverzerrte) Schätzung bezogenen Parameterbias 2. Ordnung mit diesen Grenzen als extremale Eigenwerte der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D^2 f(l)}$. Skalare Quantifizierungsergebnisse stützen sich für die Verzerrungsanteile der Beobachtungen $b_{\tilde{l}}$ neben dem Parameterbias $\boldsymbol{b_x}$ auf den Projektor $\boldsymbol{P_{Df(l)}}$ und so auf die tangentiale Komponente der Hesse-Matrix $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)}$; für die Verzerrungsanteile der Parameter $\boldsymbol{b_{\tilde{e}}}$ tritt an dessen Stelle der dazu orthogonale Projektor $\boldsymbol{P_{Df(l)}^{\perp}}$ und damit die normale Komponente von $\boldsymbol{D_Q^2 f(l)}$. Die zugehörigen Obergrenzen ergeben sich mit der Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ an der Stelle dieser Projektoren.

Alle Betrachtungen bleiben dabei formal auf den nicht überbestimmten Fall beschränkt.

A.5.6 Übersicht der systematischen und stochastischen Identitäten einer skalaren Funktion mit einer skalaren Beobachtung beliebiger Dichtefunktion für die Anteile 2. und 3. Ordnung

In diesem Zusammenhang ist die dimensionslose *Schiefe* γ relevant, die sowohl auf eine Gruppe von Messungen als auch auf deren Verteilung anwendbar ist und aus der Gleichung für das 3. zentrale Moment

$$E\{l - E\{l\}\}^3 = \int_{\infty}^{-\infty} (z - E\{l\})^3 * f_l(z)dz \tag{A.5.6.1}$$

resultiert:

$$\gamma = \frac{E\{l - E\{l\}\}^3}{\left(E\{l - E\{l\}\}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{A.5.6.2a}$$

In unmittelbarer Abhängigkeit von der Messgenauigkeit σ_l lässt sich die Schiefe auch schreiben als

$$\gamma = \frac{E\{l - E\{l\}\}^3}{\sigma_l^3} \tag{A.5.6.2b}$$

Ebenso ist die dimensionslose *Kurtosis* κ (Wölbung) von Bedeutung, welche aus der Gleichung für das 4. zentrale Moment

$$E\{l - E\{l\}\}^4 = \int_{\infty}^{-\infty} (z - E\{l\})^4 * f_l(z)dz \tag{A.5.6.3}$$

resultiert:

$$\kappa = \frac{E\{l - E\{l\}\}^4}{\left(E\{l - E\{l\}\}^2\right)^2} \tag{A.5.6.4a}$$

In unmittelbarer Abhängigkeit von der Messgenauigkeit σ_l lässt sich die Kurtosis auch schreiben als

$$\kappa = \frac{E\{l - E\{l\}\}^4}{\sigma_l^4} \tag{A.5.6.4b}$$

Beziehung (A.5.6.6) in Tabelle (A.5.6.1) ist der Quelle MEKID & VAJA (2007) entnommen und hier korrigiert angegeben, da die originale Quellendarstellung

$$\sigma_x^2 = \gamma * \frac{\partial X}{\partial l} * \frac{\partial^2 X}{\partial l^2} * \sigma_l^3 + \frac{(\kappa - 1)}{4} * \left(\frac{\partial^2 X}{\partial l^2}\right)^2 * \sigma_l^4$$

fehlerhaft ist, denn für die Normalverteilung beträgt die Kurtosis $\kappa = 3$ und nur Beziehung (A.5.6.6) mit der für die Normalverteilung außerdem geltenden Schiefe $\gamma = 0$ das mit der gesicherten Beziehung (5.17) koinzidierende Ergebnis (für in diesem Fall skalarwertige Zufallsvariable l und x) liefert:

$$\boldsymbol{C_{xx}(2)} = \sigma_x^2(2) = \frac{3}{4} * \left(\frac{\partial^2 X}{\partial l^2}\right)^2 * \sigma_l^4$$

Tab. (A.5.6.1) Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 2. Ordnung der skalarwertigen Zufallsvariablen l und x mit beliebiger Dichtefunktion für den nicht überbestimmten Fall:

Redun -danz	Deterministisch-systematische Wirkung	Stochastische Wirkung
$r = 0$	Stochastisch induziert: $b_x(2) = \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 X}{\partial l^2} * \sigma_l^2$ (A.5.6.5)	Stochastisch induziert: $\sigma_x^2(2) = \gamma * \frac{\partial X}{\partial l} * \frac{\partial^2 X}{\partial l^2} * \sigma_l^3 + \frac{\kappa}{4} * \left(\frac{\partial^2 X}{\partial l^2}\right)^2 * \sigma_l^4$ (A.5.6.6)

Unter den Bedingungen der Normalverteilung als Dichteannahme geht mit $\gamma = 0$ und $\kappa = 3$ Beziehung (5.24) in (A.5.6.5) und Beziehung (A.5.6.6) in (5.17) über, skalare Zufallsvariable l und x jeweils vorausgesetzt.

MEKID & VAJA (2007) geben die systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte für die Anteile der 3. Ordnung und den Fall eines zu schätzenden skalaren Parameters x und einer skalaren Zufallsvariable l (Beobachtung) mit beliebiger – auch nicht symmetrischer – Dichtefunktion an.

Es wird deutlich, dass die stochastische Wirkung von Anteilen 2. Ordnung auf zentrale Momente bis zur 4. Ordnung und von Anteilen 3. Ordnung auf zentrale Momente bis zur 6. Ordnung der jeweiligen Verteilungsfunktion der Beobachtungen führen.

Tab. (A.5.6.2) Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 3. Ordnung der skalarwertigen Zufallsvariablen l und x mit beliebiger Dichtefunktion für den nicht überbestimmten Fall:

Redun -danz	Deterministisch-systematische Wirkung	Stochastische Wirkung
$r = 0$	Stochastisch induziert: $$b_x(3) = \frac{1}{6} * \gamma * \frac{\partial^3 X}{\partial l^3} * \sigma_l^3$$ (A.5.6.7)	Stochastisch induziert: $$\sigma_x^2(3) = \frac{\kappa}{3} * \frac{\partial X}{\partial l} * \frac{\partial^3 X}{\partial l^3} * \sigma_l^4 + \frac{1}{6} * \frac{\partial^2 X}{\partial l^2} * \frac{\partial^3 X}{\partial l^3} * \left(E\{l - E\{l\}\}^5 - \gamma * \sigma_l^5\right) + \frac{1}{36} * \left(\frac{\partial^3 X}{\partial l^3}\right)^2 * \left(E\{l - E\{l\}\}^6 - \gamma^2 * \sigma_l^6\right)$$ (A.5.6.8)

A.5.7 Entwicklung des Erwartungswertterms $\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}})\}$

Zur Umformung des Kronecker-Produkts $E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\}$ in eine dem Erwartungswert zugängliche Form sei der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0}$ elementweise dargestellt und dabei neben dem ersten (l_1) und letzten (l_n) noch mit dem i-ten (l_i) und j-ten (l_j) Element angegeben, weil aufgrund der Kronecker-Produktbildung und der dyadischen Produkte innerhalb der aufzulösenden Erwartungswertform maximal vier unterschiedliche Beobachtungen an der Produktbildung eines einzelnen Erwartungswertterms als Element von $E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\}$ beteiligt sein können:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0} = \begin{pmatrix} l_1 - l_{0_1} \\ \vdots \\ l_i - l_{0_i} \\ \vdots \\ l_j - l_{0_j} \\ \vdots \\ l_n - l_{0_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Auf der Grundlage der vorstehenden Form für den Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ lässt sich somit die Auflösung und Umwandlung der Erwartungswertform $E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\}$ für den allgemeinen Fall zeigen.

Dazu sei zunächst das dyadische Produkt des Vektors $\boldsymbol{dl} = \boldsymbol{\varepsilon}$ mit sich selbst gebildet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1 * \varepsilon_i & \cdots & \varepsilon_1 * \varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_1 * \varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1 * \varepsilon_i & \cdots & \varepsilon_i^2 & \cdots & \varepsilon_i * \varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_i * \varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1 * \varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_i * \varepsilon_j & \cdots & \varepsilon_j^2 & \cdots & \varepsilon_j * \varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1 * \varepsilon_n & \cdots & \varepsilon_i * \varepsilon_n & \cdots & \varepsilon_j * \varepsilon_n & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

Das Argument der aufzulösenden Erwartungswertform ist das Kronecker-Produkt zweier dyadischer Produkte eines Vektors mit sich selbst und somit symmetrisch; für die Belange der Auflösung des Erwartungswertterms ist folglich die elementweise Auflösung der rechten oberen Hälfte des Kronecker-Produkts ausreichend:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	ε_1^4	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * \varepsilon_1^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i)^2$
(2)		$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_i^2$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * \varepsilon_i^2$
(3)			$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_j^2$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
(4)				$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_n^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(5)					$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_i^2$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$
(6)						ε_i^4

	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(1)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(2)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(3)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * \varepsilon_j^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(4)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * \varepsilon_n^2$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$
(5)	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(6)	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(7)	$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_j^2$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j)^2$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(8)		$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_n^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$
(9)			$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_j^2$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(10)				$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_j^2$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(11)					ε_j^4	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon)$
(12)						$\varepsilon_j^2 * \varepsilon_n^2$

	(13)	(14)	(15)	(16)
(1)	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n)^2$
(2)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(3)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(4)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n) * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(5)	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(6)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n)^2$
(7)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(8)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n)^2$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(9)	$\varepsilon_1^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(10)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_i) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_i^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(11)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_j) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$\varepsilon_j^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n)^2$
(12)	$(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_i * \varepsilon_n) * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$	$(\varepsilon_j * \varepsilon_n)^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(13)	$\varepsilon_1^2 * \varepsilon_n^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_i)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)$
(14)		$\varepsilon_i^2 * \varepsilon_n^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_j)$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_i * \varepsilon_n)$
(15)			$\varepsilon_j^2 * \varepsilon_n^2$	$\varepsilon_n^2 * (\varepsilon_j * \varepsilon_n)$
(16)				ε_n^4

Der Übergang auf die Erwartungswerte (A.5.3.1a) bis (A.5.3.1i) liefert:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	$3 * \sigma_1^4$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1i}$	σ_{1i}^2	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$
(2)		$\sigma_1^2 * \sigma_i^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	σ_{1i}^2	$\sigma_i^2 \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$
(3)			$\sigma_1^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$
(4)				$\sigma_1^2 * \sigma_n^2$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_n^2$
(5)					$\sigma_1^2 * \sigma_i^2$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$
(6)						$3 * \sigma_i^4$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$
(7)							$\sigma_i^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$
(8)								$\sigma_i^2 * \sigma_n^2$

	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
(1)	$\sigma_1^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1i}$	σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	σ_{in}^2
(2)	$\sigma_{1j} * \sigma_{1i}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{1n}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{in} * \sigma_{1n}$
(3)	σ_{1j}^2	$\sigma_{1j} * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_{jn} * \sigma_{1n}$
(4)	$\sigma_{1j} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$	σ_{1n}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{1n}$	$\sigma_{jn} * \sigma_{1n}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
(5)	$\sigma_1^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1i}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$
(6)	$\sigma_{ij} * \sigma_{1i}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{ij}$	σ_{ij}^2	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{in}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	σ_{in}^2
(7)	$\sigma_{ij} * \sigma_{ij}$	σ_{ij}^2	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$
(8)	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{in}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{in}$	σ_{in}^2	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
(9)	$\sigma_1^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{1n}$	$\sigma_1^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$
(10)		$\sigma_i^2 * \sigma_j^2$	$\sigma_j^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{in}$	$\sigma_{1i} * \sigma_{jn}$	$\sigma_i^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$
(11)			$3 * \sigma_j^4$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	$\sigma_{1j} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{ij} * \sigma_{jn}$	$\sigma_j^2 * \sigma_{jn}$	σ_{jn}^2
(12)				$\sigma_j^2 * \sigma_n^2$	$\sigma_{1n} * \sigma_{jn}$	$\sigma_{in} * \sigma_{jn}$	σ_{jn}^2	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
(13)					$\sigma_1^2 * \sigma_n^2$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1i}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1j}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{1n}$
(14)						$\sigma_i^2 * \sigma_n^2$	$\sigma_n^2 * \sigma_{ij}$	$\sigma_n^2 * \sigma_{in}$
(15)							$\sigma_j^2 * \sigma_n^2$	$\sigma_n^2 * \sigma_{jn}$
(16)								$3 * \sigma_n^4$

Es ergibt sich folgende Identität: $E\{(\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T) \otimes (\boldsymbol{\varepsilon} * \boldsymbol{\varepsilon}^T)\} = \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}} + 2 * vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right) * \left(vec\left(diag\left(diag(\boldsymbol{C_{ll}})\right)\right)\right)^T$

A.5.8 Entwicklung der zweiten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen

In der Geodäsie ist bisher lediglich ein funktionales Modell bekannt, welches auf den Ableitungen der Beobachtungen nach den Parametern beruht, nicht aber der umgekehrte Fall, für den hier die zweiten Ableitungen der Parameter nach den Beobachtungen benötigt werden.

Man erhält die (ersten und) zweiten Ableitungen der folgenden Parametertypen

- Neupunktkoordinate (Anfangspunkt i: y_i / x_i, Endpunkt j: y_j / x_j)
- Orientierungsunbekannte der Richtungssatzmessung (o)
- EDM-Maßstabsunbekannte (m)
- Einpassungsparameter Drehwinkel (φ) und Maßstabsfaktor (m) einer GNSS-Session

nach den folgenden mit dem jeweiligen Parametertyp in einem Funktionalzusammenhang stehenden Beobachtungsgruppen

- Richtungen (r)
- (EDM-) Strecken (s)
- Rechts- (ΔRe) und Hochwertkoordinatendifferenz (ΔHo) aus Basislinienbeobachtung

wie folgt:

A.5.8.1 Ableitungen nach den Richtungen

A.5.8.1.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes

Richtungswinkel $t = r + o = arctan\left(\frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}\right)$

$$tan(r + o) = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}$$

$$tan(r + o) * (x_k - x_i) = y_k - y_i$$

$$y_i = y_k - tan(r + o) * (x_k - x_i)$$

$$y_i'(r) = -(x_k - x_i) * \frac{1}{\left(cos(r + o)\right)^2} = -\frac{x_k - x_i}{\left(cos(t)\right)^2} \qquad \text{(A.5.8.1a1)}$$

$$y_i''(r) = -(x_k - x_i) * (-2) * \left(cos(r + o)\right)^{-3} * \left(-sin(r + o)\right)$$

$$y_i''(r) = -\frac{2 * (x_k - x_i) * sin(t)}{\left(cos(t)\right)^3} \qquad \text{(A.5.8.1b1)}$$

Alternativer Ansatz ohne Tangensfunktion zur Umgehung ihrer beiden Unendlichkeitsstellen:

$$y_i = y_k - \frac{s}{m} * sin(r + o)$$

$$y_i'(r) = -\frac{s}{m} * cos(r + o) = -\frac{s}{m} * cos(t) \qquad \text{(A.5.8.1a2)}$$

$$y_i''(r) = \frac{s}{m} * sin(r + o) = \frac{s}{m} * sin(t) \qquad \text{(A.5.8.1b2)}$$

A.5.8.1.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes

$$x_k - x_i = \frac{y_k - y_i}{tan(r + o)}$$

$$x_i = x_k - \frac{y_k - y_i}{tan(r + o)}$$

$$x_i'(r) = -(y_k - y_i) * (-1) * \left(tan(r + o)\right)^{-2} * \frac{1}{\left(cos(r + o)\right)^2} = \frac{(y_k - y_i) * \left(cos(r + o)\right)^2}{\left(sin(r + o)\right)^2 * \left(cos(r + o)\right)^2}$$

$$x_i'(r) = \frac{y_k - y_i}{\left(sin(t)\right)^2} \qquad \text{(A.5.8.2a1)}$$

$$x_i''(r) = (y_k - y_i) * (-2) * \left(sin(r + o)\right)^{-3} * cos(r + o)$$

$$x_i''(r) = -\frac{2 * (y_k - y_i) * cos(t)}{\left(sin(t)\right)^3} \qquad \text{(A.5.8.2b1)}$$

Alternativer Ansatz ohne Tangensfunktion zur Umgehung ihrer beiden Unendlichkeitsstellen:

$$x_i = x_k - \frac{s}{m} * cos(r + o)$$

$$x_i'(r) = \frac{s}{m} * sin(r + o) = \frac{s}{m} * sin(t) \qquad \text{(A.5.8.2a2)}$$

$$x_i''(r) = \frac{s}{m} * cos(r + o) = \frac{s}{m} * cos(t) \qquad \text{(A.5.8.2b2)}$$

A.5.8.1.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes

$$y_k = y_i + tan(r + o) * (x_k - x_i)$$

$$y_k'(r) = (x_k - x_i) * \frac{1}{\left(cos(r+o)\right)^2} = \frac{x_k - x_i}{\left(cos(t)\right)^2} \qquad \text{(A.5.8.3a1)}$$

$$y_k''(r) = (x_k - x_i) * (-2) * \left(cos(r+o)\right)^{-3} * \left(-sin(r+o)\right)$$

$$y_k''(r) = \frac{2 * (x_k - x_i) * sin(t)}{\left(cos(t)\right)^3} \qquad \text{(A.5.8.3b1)}$$

Alternativer Ansatz ohne Tangensfunktion zur Umgehung ihrer beiden Unendlichkeitsstellen:

$$y_k = y_i + \frac{s}{m} * sin(r+o)$$

$$y_k'(r) = \frac{s}{m} * cos(r+o) = \frac{s}{m} * cos(t) \qquad \text{(A.5.8.3a2)}$$

$$y_k''(r) = -\frac{s}{m} * sin(r+o) = -\frac{s}{m} * sin(t) \qquad \text{(A.5.8.3b2)}$$

A.5.8.1.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes

$$x_k = x_i + \frac{y_k - y_i}{tan(r+o)}$$

$$x_k'(r) = (y_k - y_i) * (-1) * \left(tan(r+o)\right)^{-2} * \frac{1}{\left(cos(r+o)\right)^2} = -\frac{(y_k - y_i) * \left(cos(r+o)\right)^2}{\left(sin(r+o)\right)^2 * \left(cos(r+o)\right)^2}$$

$$x_k'(r) = -\frac{y_k - y_i}{\left(sin(t)\right)^2} \qquad \text{(A.5.8.4a1)}$$

$$x_k''(r) = -(y_k - y_i) * (-2) * \left(sin(r+o)\right)^{-3} * cos(r+o) =$$

$$x_k''(r) = \frac{2 * (y_k - y_i) * cos(t)}{\left(sin(t)\right)^3} \qquad \text{(A.5.8.4b1)}$$

Alternativer Ansatz ohne Tangensfunktion zur Umgehung ihrer beiden Unendlichkeitsstellen:

$$x_k = x_i + \frac{s}{m} * cos(r+o)$$

$$x_k'(r) = -\frac{s}{m} * sin(r+o) = -\frac{s}{m} * sin(t) \qquad \text{(A.5.8.4a2)}$$

$$x_k''(r) = -\frac{s}{m} * cos(r+o) = -\frac{s}{m} * cos(t) \qquad \text{(A.5.8.4b2)}$$

A.5.8.1.5 Ableitung für die Orientierungsunbekannte

$$o = t - r = \ arctan\left(\frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}\right) - r$$

$$o'(r) = \ -1 \tag{A.5.8.5a}$$

$$o''(r) = \ 0 \tag{A.5.8.5b}$$

A.5.8.2 Ableitungen nach den Strecken

A.5.8.2.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes

$$y_i = \ y_k - \frac{s}{m} * sin(r + o)$$

$$y_i'(s) = \frac{sin(r + o)}{m} = \frac{sin(t)}{m} \tag{A.5.8.6a}$$

$$y_i''(s) = 0 \tag{A.5.8.6b}$$

A.5.8.2.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes

$$x_i = \ x_k - \frac{s}{m} * cos(r + o)$$

$$x_i'(s) = \ -\frac{cos(r + o)}{m} = -\frac{cos(t)}{m} \tag{A.5.8.7a}$$

$$x_i''(s) = 0 \tag{A.5.8.7b}$$

A.5.8.2.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes

$$y_k'(s) = \frac{sin(r + o)}{m} = \frac{sin(t)}{m} \tag{A.5.8.8a}$$

$$y_i''(s) = 0 \tag{A.5.8.8b}$$

A.5.8.2.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes

$$x_k = \ x_i + \frac{s}{m} * cos(r + o)$$

$$x_k'(s) = \frac{cos(r + o)}{m} = \frac{cos(t)}{m} \tag{A.5.8.9a}$$

$$x_k''(s) = 0 \tag{A.5.8.9b}$$

A.5.8.2.5 Ableitung für den Maßstabsfaktor

$$s = m * ((y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2)^{0.5}$$

$$m = s * ((y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2)^{-0.5}$$

$$m'^{(s)} = ((y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2)^{-0.5} \tag{A.5.8.10a}$$

$$m''^{(s)} = 0 \tag{A.5.8.10b}$$

A.5.8.3 Ableitungen nach den Basislinien

A.5.8.3.1 Ableitung für den Rechtswert des Anfangspunktes

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\Delta Re_{GNSS} = m * cos(\varphi) * (y_k - y_i) - m * sin(\varphi) * (x_k - x_i)$$

$$\Delta Re_{GNSS} + m * sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = m * cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{cos(\varphi)} \ = y_k - y_i$$

$$y_i \ = y_k - \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{cos(\varphi)}$$

$$y_i'(\Delta Re_{GNSS}) = \ -\frac{1}{m * cos(\varphi)} \tag{A.5.8.11a}$$

$$y_i''(\Delta Re_{GNSS}) = \ 0 \tag{A.5.8.11b}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\Delta Ho_{GNSS} = m * sin(\varphi) * (y_k - y_i) + m * cos(\varphi) * (x_k - x_i)$$

$$\Delta Ho_{GNSS} - m * cos(\varphi) * (x_k - x_i) = m * sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i) = sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{sin(\varphi)} = y_k - y_i$$

$$y_i = y_k - \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{sin(\varphi)}$$

$$y_i'(\Delta Ho_{GNSS}) = -\frac{1}{m * sin(\varphi)} \tag{A.5.8.11c}$$

$$y_i''(\Delta Ho_{GNSS}) = 0 \tag{A.5.8.11d}$$

A.5.8.3.2 Ableitung für den Hochwert des Anfangspunktes

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i) = cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$sin(\varphi) * (x_k - x_i) = cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}$$

$$x_k - x_i = \frac{1}{sin(\varphi)} * \left(cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)$$

$$x_i = x_k - \frac{1}{sin(\varphi)} * \left(cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)$$

$$x_i'(\Delta Re_{GNSS}) = \frac{1}{m * sin(\varphi)} \tag{A.5.8.12a}$$

$$x_i''(\Delta Re_{GNSS}) = 0 \tag{A.5.8.12b}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i) = sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$cos(\varphi) * (x_k - x_i) = \frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$x_k - x_i = \frac{1}{cos(\varphi)} * \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)\right)$$

$$x_i = x_k - \frac{1}{cos(\varphi)} * \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)\right)$$

$$x_i'(\Delta Ho_{GNSS}) = -\frac{1}{m * cos(\varphi)} \tag{A.5.8.12c}$$

$$x_i''(\Delta Ho_{GNSS}) = 0 \tag{A.5.8.12d}$$

A.5.8.3.3 Ableitung für den Rechtswert des Endpunktes

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\Delta Re_{GNSS} = m * cos(\varphi) * (y_k - y_i) - m * sin(\varphi) * (x_k - x_i)$$

$$\Delta Re_{GNSS} + m * sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = m * cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{cos(\varphi)} \ = y_k - y_i$$

$$y_k \ = y_i + \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{cos(\varphi)}$$

$$y_k'(\Delta Re_{GNSS}) = \frac{1}{m * cos(\varphi)} \qquad \text{(A.5.8.13a)}$$

$$y_k''(\Delta Re_{GNSS}) = \ 0 \qquad \text{(A.5.8.13b)}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\Delta Ho_{GNSS} = m * sin(\varphi) * (y_k - y_i) + m * cos(\varphi) * (x_k - x_i)$$

$$\Delta Ho_{GNSS} - m * cos(\varphi) * (x_k - x_i) = m * sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i) = sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{sin(\varphi)} = y_k - y_i$$

$$y_k = y_i + \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i)\right) * \frac{1}{sin(\varphi)}$$

$$y_k'(\Delta Ho_{GNSS}) = \frac{1}{m * sin(\varphi)} \qquad \text{(A.5.8.13c)}$$

$$y_k''(\Delta Ho_{GNSS}) = \ 0 \qquad \text{(A.5.8.13d)}$$

A.5.8.3.4 Ableitung für den Hochwert des Endpunktes

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = \ cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$sin(\varphi) * (x_k - x_i) \ = \ cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}$$

$$x_k - x_i = \frac{1}{sin(\varphi)} * \left(cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)$$

$$x_k = x_i + \frac{1}{sin(\varphi)} * \left(cos(\varphi) * (y_k - y_i) - \frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)$$

$$x_i'(\Delta Re_{GNSS}) = -\frac{1}{m * sin(\varphi)} \quad \text{(A.5.8.14a)}$$

$$x''_i(\Delta Re_{GNSS}) = 0 \quad \text{(A.5.8.14b)}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i) = sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$cos(\varphi) * (x_k - x_i) = \frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$x_k - x_i = \frac{1}{cos(\varphi)} * \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)\right)$$

$$x_k = x_i + \frac{1}{cos(\varphi)} * \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - sin(\varphi) * (y_k - y_i)\right)$$

$$x_i'(\Delta Ho_{GNSS}) = \frac{1}{m * cos(\varphi)} \quad \text{(A.5.8.14c)}$$

$$x''_i(\Delta Ho_{GNSS}) = 0 \quad \text{(A.5.8.14d)}$$

A.5.8.3.5 Ableitung für den Drehwinkel

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} + sin(\varphi) * (x_k - x_i) = cos(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} = cos(\varphi) * (y_k - y_i) - sin(\varphi) * (x_k - x_i)$$

Entsprechend des Additionstheorems des Sinusoids gilt:

$$a * sin(\varphi) + b * cos(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} * sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

Mit $a = -(x_k - x_i)$ und $b = (y_k - y_i)$ erhält man hier

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} * sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{y_k - y_i}{-(x_k - x_i)}\right)\right)$$

$$\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5} = sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{y_k - y_i}{-(x_k - x_i)}\right)\right)$$

$$arcsin\left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right) = \varphi + arctan\left(\frac{y_k - y_i}{-(x_k - x_i)}\right)$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right) - arctan\left(\frac{y_k - y_i}{-(x_k - x_i)}\right)$$

$$\varphi'(\Delta Re_{GNSS}) = \left(1 - \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right)^2\right)^{-0.5} * \frac{1}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Re_{GNSS}) = \left(1 - \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right)^{-0.5} * m^{-0.5} * m^{-0.5} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Re_{GNSS}) = \left(\left(1 - \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right) * m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)\right)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Re_{GNSS}) = \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) * \left(\frac{\Delta Re_{GNSS}}{m}\right)^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Re_{GNSS}) = \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Re_{GNSS}{}^2\right)^{-0.5} \qquad \text{(A.5.8.15a)}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) = -2 * \Delta Re_{GNSS} * \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Re_{GNSS}{}^2\right)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) = \Delta Re_{GNSS} * \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Re_{GNSS}{}^2\right)^{-1.5} \qquad \text{(A.5.8.15b)}$$

Im Falle einer Netzplanung fehlen echte Beobachtungen ΔRe_{GNSS}. Dann gilt gemäß der Beziehung

$$m = \frac{\Delta Re_{GNSS}}{y_k - y_i} \Rightarrow \Delta Re_{GNSS} = m * (y_k - y_i)$$

folgende Termumschreibung:

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) \;=\; m * (y_k - y_i) * (m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - m^2 * (y_k - y_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) \;=\; m * (y_k - y_i) * (m^2 * (x_k - x_i)^2 + m^2 * (y_k - y_i)^2 - m^2 * (y_k - y_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) \;=\; m * (y_k - y_i) * (m^2 * (x_k - x_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) \;=\; m * (y_k - y_i) * \left(m * (x_k - x_i)\right)^{-3}$$

$$\varphi''(\Delta Re_{GNSS}) = \frac{y_k - y_i}{m^2 * (x_k - x_i)^3} \qquad \text{(A.5.8.15c)}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} - cos(\varphi) * (x_k - x_i) \;=\; sin(\varphi) * (y_k - y_i)$$

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} \;=\; sin(\varphi) * (y_k - y_i) + cos(\varphi) * (x_k - x_i)$$

Entsprechend des Additionstheorems des Sinusoids gilt:

$$a * sin(\varphi) + b * cos(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} * sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

Mit $a = (y_k - y_i)$ und $b = (x_k - x_i)$ erhält man hier

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} \;=\; \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} * sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)\right)$$

$$\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5} \;=\; sin\left(\varphi + arctan\left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)\right)$$

$$arcsin\left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right) \;=\; \varphi + arctan\left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)$$

$$\varphi \;=\; arcsin\left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right) - arctan\left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)$$

$$\varphi'(\Delta Ho_{GNSS}) \;=\; \left(1 - \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}\right)^2\right)^{-0.5} * \frac{1}{m} * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Ho_{GNSS}) = \left(1 - \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m}\right)^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right)^{-0.5} * m^{-0.5} * m^{-0.5}$$
$$* ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Ho_{GNSS}) = \left(\left(1 - \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m}\right)^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right) * m^2\right.$$
$$\left. * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)\right)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Ho_{GNSS}) = \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) * \left(\frac{\Delta Ho_{GNSS}}{m}\right)^2\right.$$
$$\left. * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{-1}\right)^{-0.5}$$

$$\varphi'(\Delta Ho_{GNSS}) = \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Ho_{GNSS}{}^2\right)^{-0.5} \qquad \text{(A.5.8.15d)}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = -2 * \Delta Ho_{GNSS} * \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Ho_{GNSS}{}^2\right)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = \Delta Ho_{GNSS} * \left(m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - \Delta Ho_{GNSS}{}^2\right)^{-1.5} \qquad \text{(A.5.8.15e)}$$

Im Falle einer Netzplanung fehlen echte Beobachtungen ΔHo_{GNSS}. Dann gilt gemäß der Beziehung

$$m = \frac{\Delta Ho_{GNSS}}{x_k - x_i} \Rightarrow \Delta Ho_{GNSS} = m * (x_k - x_i)$$

folgende Termumschreibung:

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = m * (x_k - x_i) * (m^2 * ((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2) - m^2 * (x_k - x_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = m * (x_k - x_i) * (m^2 * (x_k - x_i)^2 + m^2 * (y_k - y_i)^2 - m^2 * (x_k - x_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = m * (x_k - x_i) * (m^2 * (y_k - y_i)^2)^{-1.5}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = m * (x_k - x_i) * \left(m * (y_k - y_i)\right)^{-3}$$

$$\varphi''(\Delta Ho_{GNSS}) = \frac{x_k - x_i}{m^2 * (y_k - y_i)^3} \qquad \text{(A.5.8.15f)}$$

A.5.8.3.6 Ableitung für den Maßstabsfaktor

Beobachtete Rechtswertdifferenz:

$$\Delta Re_{GNSS} = m * cos(\varphi) * (y_k - y_i) - m * sin(\varphi) * (x_k - x_i)$$
$$= m * \left(cos(\varphi) * (y_k - y_i) - sin(\varphi) * (x_k - x_i)\right)$$

$$m = \frac{\Delta Re_{GNSS}}{cos(\varphi) * (y_k - y_i) - sin(\varphi) * (x_k - x_i)}$$

$$m'(\Delta Re_{GNSS}) = \frac{1}{cos(\varphi) * (y_k - y_i) - sin(\varphi) * (x_k - x_i)} \quad \text{(A.5.8.16a)}$$

$$m''(\Delta Re_{GNSS}) = 0 \quad \text{(A.5.8.16b)}$$

Beobachtete Hochwertdifferenz:

$$\Delta Ho_{GNSS} = m * sin(\varphi) * (y_k - y_i) + m * cos(\varphi) * (x_k - x_i)$$
$$= m * \left(sin(\varphi) * (y_k - y_i) + cos(\varphi) * (x_k - x_i)\right)$$

$$m = \frac{\Delta Ho_{GNSS}}{sin(\varphi) * (y_k - y_i) + cos(\varphi) * (x_k - x_i)}$$

$$m'(\Delta Ho_{GNSS}) = \frac{1}{sin(\varphi) * (y_k - y_i) + cos(\varphi) * (x_k - x_i)} \quad \text{(A.5.8.16c)}$$

$$m''(\Delta Ho_{GNSS}) = 0 \quad \text{(A.5.8.16d)}$$

A.5.9 Partielle erste und zweite Ableitungen nach den Beobachtungen im Polygonzug

Die partiellen ersten Ableitungen lauten im einseitig angeschlossenen Polygonzug für die Richtungen:

Mit $k \leq j$:

$$Y_j'(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.1a}$$

$$X_j'(r_{2*k-1}) = \sum_{l=k}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.1b}$$

$$Y_j'(r_{2*k}) = \sum_{l=k}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.2a}$$

$$X_j'(r_{2*k}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.2b}$$

und für die Strecken mit $n \leq j$:

$$Y_j'(s_n) = sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \tag{A.5.9.3a}$$

$$X_j'(s_n) = cos\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \tag{A.5.9.3b}$$

Die partiellen zweiten Ableitungen lauten im einseitig angeschlossenen Polygonzug:

Mit $k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.4a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.9.4b}$$

mit $k \leq j, q \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q}) = \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.5a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q}) = \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.5b)}$$

mit $q < k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q-1}) = -\sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.6a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q-1}) = -\sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.6b)}$$

mit $k \leq n \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}, s_n) = -cos\left(\sum_{m=1}^{n} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200 \right) \quad \text{(A.5.9.7a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}, s_n) = sin\left(\sum_{m=1}^{n} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200 \right) \quad \text{(A.5.9.7b)}$$

mit $k \leq j, q \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k}, r_{2*q-1}) = \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.8a)}$$

$X_j^{(2)}(r_{2*k}, r_{2*q-1})$

$$= \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.8b)}$$

mit $q < k \leq j$:

$Y_j^{(2)}(r_{2*k}, r_{2*q})$

$$= - \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.9a)}$$

$X_j^{(2)}(r_{2*k}, r_{2*q})$

$$- \sum_{l=max(k,q)}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.9b)}$$

mit $k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k}) = - \sum_{l=k}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.10a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k}) = - \sum_{l=k}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.9.10b)}$$

mit $k \leq n \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k}, s_n) = cos\left(\sum_{m=1}^{n} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200 \right) \quad \text{(A.5.9.11a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k}, s_n) = -sin\left(\sum_{m=1}^{n} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200 \right) \quad \text{(A.5.9.11b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n, r_{2*k-1}) = -cos\left(\sum_{p=1}^{n} (r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200 \right) \quad \text{(A.5.9.12a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, r_{2*k-1}) = sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.9.12b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n, r_{2*k}) = cos\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.9.13a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, r_{2*k}) = -sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.9.13b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n) = 0 \quad \text{(A.5.9.14a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n) = 0 \quad \text{(A.5.9.14b)}$$

mit $q < j$:

$$Y_j^{(2)}(s_n, s_q) = 0 \quad \text{(A.5.9.15a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, s_q) = 0 \quad \text{(A.5.9.15b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_q, s_n) = 0 \quad \text{(A.5.9.16a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_q, s_n) = 0 \quad \text{(A.5.9.16b)}$$

A.5.10 Größe der systematischen und stochastischen Verzerrungseffekte 2. Ordnung

A.5.10.1 Das einfache polare Anhängen

A.5.10.1.1 Konfiguration des Beispiels

Ohne unzulässige Einschränkungen des allgemeinen Falles einzugehen sei zur numerischen Vereinfachung für den Standpunkt der Nullpunkt des Koordinatensystems angenommen.

Die Zielfunktion $f(\boldsymbol{l})$ zur Bestimmung der gesuchten Neupunktkoordinaten Y_N und X_N lautet somit

$$Y_N = s * sin(t_N) \tag{A.5.10.1a}$$

$$X_N = s * cos(t_N) \tag{A.5.10.1b}$$

Auf den rechten Gleichungsseiten ist der neupunktbezogene Richtungswinkel t_N vorbereitend zu eliminieren und durch die Beobachtungen zu ersetzen. Mit

r : Neupunktbezogene Richtungsbeobachtung
o : Orientierungsunbekannte des Polarstandpunktes

ergibt sich dazu

$$t_N = r + o \tag{A.5.10.2}$$

Weiter gilt mit

t_{FZ} : Anschlusspunktbezogener Richtungswinkel
r_{FZ} : Anschlusspunktbezogene Richtungsbeobachtung

für die Orientierungsunbekannte des Polarstandpunktes

$$o = t_{FZ} - r_{FZ} \tag{A.5.10.3}$$

Ebenfalls ohne unzulässige Einschränkungen des allgemeinen Falles sei der feste Anschlusspunkt entlang der positiven Hochachse festgelegt, so dass $t_{FZ} = 0$ und damit nach Gleichung (A.5.10.3) für dieses Beispiel $o = -r_{FZ}$. Eingesetzt in Gleichung (A.5.10.2) ergibt sich $t_N = r - r_{FZ}$. Die Zielfunktion aus (A.5.10.1a) und (A.5.10.1b) geht für das Design dieser Ortungsaufgabe über in die Form

$$Y_N = f_Y(\boldsymbol{l}) = s * sin(r - r_{FZ}) \tag{A.5.10.4a}$$

$$X_N = f_X(\boldsymbol{l}) = s * cos(r - r_{FZ}) \tag{A.5.10.4b}$$

mit $\boldsymbol{l} = (r_{FZ} \quad r \quad s)^T$.

Die Variablen der rechten Gleichungsseiten sind – wie für Betrachtungen zur Varianzenfortpflanzung vom Beobachtungs- in den Parameterraum formal erforderlich – ausschließlich durch Beobachtungen gegeben.

Das bisher ohne unzulässige Einschränkungen des allgemeinen Falles eines einfachen polaren Anhängens konzipierte Beispiel sei durch die Annahme eines entlang der positiven Rechtsachse gelegenen zu bestimmenden Polarpunktes vervollständigt. Auf diese Weise vereinfachen sich die Funktionswerte der Winkelfunktionen in den partiellen Ableitungen aufgrund eines Argumentes von $r - r_{FZ} = 100$ gon zu $sin(100) = 1$ bzw. $cos(100) = 0$. Der konkrete Wert für die Orientierungsunbekannte spielt wegen der in (A.5.10.3) erfolgten Eliminierung dieser Größe keine Rolle.

Die zugehörigen partiellen ersten Ableitungen lauten:

$f'_{Y_N}(r_{FZ}) = -s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.5a) $f'_{X_N}(r_{FZ}) = s * sin(r - r_{FZ}) = s$ (A.5.10.5b)

$f'_{Y_N}(r) = s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.5c) $f'_{X_N}(r) = -s * sin(r - r_{FZ}) = -s$ (A.5.10.5d)

$f'_{Y_N}(s) = sin(r - r_{FZ}) = 1$ (A.5.10.5e) $f'_{X_N}(s) = cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.5f)

Die zugehörigen partiellen zweiten Ableitungen lauten:

$f^{(2)}_{Y_N}(r_{FZ}) = -s * sin(r - r_{FZ}) = -s$ (A.5.10.6a) $f^{(2)}_{X_N}(r_{FZ}) = -s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6b)

$f^{(2)}_{Y_N}(r_{FZ}, r) = s * sin(r - r_{FZ}) = s$ (A.5.10.6c) $f^{(2)}_{X_N}(r_{FZ}, r) = s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6d)

$f^{(2)}_{Y_N}(r_{FZ}, s) = -cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6e) $f^{(2)}_{X_N}(r_{FZ}, s) = sin(r - r_{FZ}) = 1$ (A.5.10.6f)

$f^{(2)}_{Y_N}(r, r_{FZ}) = s * sin(r - r_{FZ}) = s$ (A.5.10.6g) $f^{(2)}_{X_N}(r, r_{FZ}) = s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6h)

$f^{(2)}_{Y_N}(r) = -s * sin(r - r_{FZ}) = -s$ (A.5.10.6i) $f^{(2)}_{X_N}(r) = -s * cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6j)

$f^{(2)}_{Y_N}(r, s) = cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6k) $f^{(2)}_{X_N}(r, s) = -sin(r - r_{FZ}) = -1$ (A.5.10.6l)

$f^{(2)}_{Y_N}(s, r_{FZ}) = -cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6m) $f^{(2)}_{X_N}(s, r_{FZ}) = sin(r - r_{FZ}) = 1$ (A.5.10.6n)

$f^{(2)}_{Y_N}(s, r) = cos(r - r_{FZ}) = 0$ (A.5.10.6o) $f^{(2)}_{X_N}(s, r) = -sin(r - r_{FZ}) = -1$ (A.5.10.6p)

$f^{(2)}_{Y_N}(s) = 0$ (A.5.10.6q) $f^{(2)}_{X_N}(s) = 0$ (A.5.10.6r)

A.5.10.1.2 Größenordnung der Fehleranteile 1. und 2. Ordnung

Mit $s = 1000\ m$ und den angenommenen À-priori-Genauigkeiten der Beobachtungen

- Richtung zum Fernziel :$\sigma_{r_{FZ}} = 0.005$ gon
- Übrige Richtungen :$\sigma_r = 0.005$ gon
- Strecken :$\sigma_s = 0.005$ m

ergeben sich die gesuchten Standardabweichungen der unbekannten Neupunktkoordinaten mit den Anteilen 1. (1), 2. (2) bzw. 1. und 2. (1+2) Ordnung und der stochastisch induzierte Parameterbias nach der 2. Ordnung $b_x(2)$ in der Form (5.24) nach GRAFAREND & SCHAFFRIN (1993) wie folgt:

Tab. (A.5.10.1) Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.005 gon):

$\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.005\ gon$		
	σ_{Y_N}	σ_{X_N}
	[m]	[m]
(1)	0.005000000	0.111072073
(2)	0.000008724	0.000000000
(1+2)	0.005000008	0.111072073
$b_x(2)$	-0.000006169	0.000000000

Es zeigt sich eine sehr geringe Ausprägung der Fehleranteile 2. Ordnung in der Standardabweichung des Neupunktrechtswertes in der Größenordnung von 8 bis 9 µm bzw. in gemeinschaftlicher Wirkung mit den Anteilen 1. Ordnung von 8 nm.

Da die Streckenbeobachtungen aufgrund ihrer Linearität in den originären Zielfunktionen (A.5.10.1a) und (A.5.10.1b) aber für die Stochastik der unbekannten Neupunktkoordinaten keine Varianzanteile höher als 1. Ordnung beitragen können und die Stochastik des Neupunkthochwertes keine Anteile 2. Ordnung aufweist, lassen sich jene Anteile nur über die Richtungsbeobachtungen und nur für den Neupunktrechtswert induzieren. Aufgrund der für dieses Fallbeispiel bestehenden Invarianz der zugehörigen partiellen 2. Ableitungen $f_Y^{(2)}(r_{FZ}) = f_Y^{(2)}(r) = -s$ verbleiben hier lediglich die À-priori-Richtungsgenauigkeiten $\sigma_{r_{FZ}}$ und σ_r zur Induktion der Anteile 2. Ordnung innerhalb der Stochastik des Parameterraumes, für deren numerisch belastbarere Nachweisbarkeit diese À-priori-Genauigkeiten exemplarisch zunächst auf $\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.05$ gon verzehnfacht seien.

Tab. (A.5.10.2) Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.05 gon):

$\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.05\ gon$		
	σ_{Y_N}	σ_{X_N}
	[m]	[m]
(1)	0.005000000	1.110720734
(2)	0.000872358	0.000000000
(1+2)	0.005075530	1.110720734
$b_x(2)$	-0.000616850	0.000000000

Erwartungsgemäß bilden sich für die Standardabweichung des Neupunkthochwertes keine systematischen oder stochastischen Anteile 2. Ordnung ab, wie bereits im Zusammenhang mit der ursprünglich

angenommenen À-priori-Genauigkeitssituation des Beobachtungsraumes nachgewiesen. Die Standardabweichung des Neupunktrechtswertes vergrößert sich aber auf eine numerisch belastbarere Größenordnung von etwa 5.08 mm anstelle von 5 mm + 8 nm des ursprünglichen stochastischen Ansatzes.
Für $\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.05$ gon beträgt der stochastische Anteil 2. Ordnung explizit $\sigma_{Y_N}(2) = 0.87$ mm.

Für eine weitere Verzehnfachung der À-priori-Genauigkeiten auf $\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.5$ gon ergeben sich die systematischen und stochastischen Verzerrungen im Parameterraum gemäß folgender Übersicht.

Tab. (A.5.10.3) Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.5 gon):

$\sigma_{r_{FZ}} = \sigma_r = 0.5\ gon$		
	σ_{Y_N}	σ_{X_N}
	[m]	[m]
(1)	0.005000000	11.107207340
(2)	0.087235802	0.000000000
(1+2)	0.087378975	11.107207340
$b_x(2)$	-0.061685028	0.000000000

Aufgrund des Auftretens der beobachtungsbezogenen zufälligen Varianzanteile in einer ihrer vierten Potenz entsprechenden Form für die Ermittlung der (quadratischen) parameterbezogenen zufälligen Varianzanteile $\boldsymbol{C_{xx}(2)}$ und deren linearer Transformation in den Parameterraum (als symmetrische Produktbildung mit Beteiligung der Hesse-Matrix) nach (5.22) wirken maßstäbliche Änderungen der (eindimensionalen) beobachtungsbezogenen Anteile ebenfalls mit der vierten Potenz des Maßstabs jener Veränderungen auf $\boldsymbol{C_{xx}(2)}$ und folglich mit der zweiten Potenz dieses Maßstabs auf die Standardabweichungen der Parameter als deren eindimensionale Genauigkeitsmaße.
Im betrachteten Beispiel führte eine globale Verzehnfachung der (eindimensionalen) Beobachtungsgenauigkeiten entsprechend stets zur Vergrößerung der Varianzanteile 2. Ordnung um den Faktor 100 in ihrer eindimensionalen Form, da die parameterbezogenen Standardabweichungen 2. Ordnung nach (5.22) von den Varianzen und Kovarianzen der Beobachtungen abhängen.

A.5.10.2 Der einseitig angeschlossene Polygonzug

Ohne unzulässige Einschränkungen des allgemeinen Falles einzugehen sei auch hier zur numerischen Vereinfachung für den (einzigen) Standpunkt bekannter Koordinaten (FP) der Nullpunkt des Koordinatensystems angenommen, so dass sich die Zielfunktionen zur Bestimmung der Lagekoordinaten des ersten Brechpunktes als ersten Neupunkt (N_1) ergeben zu

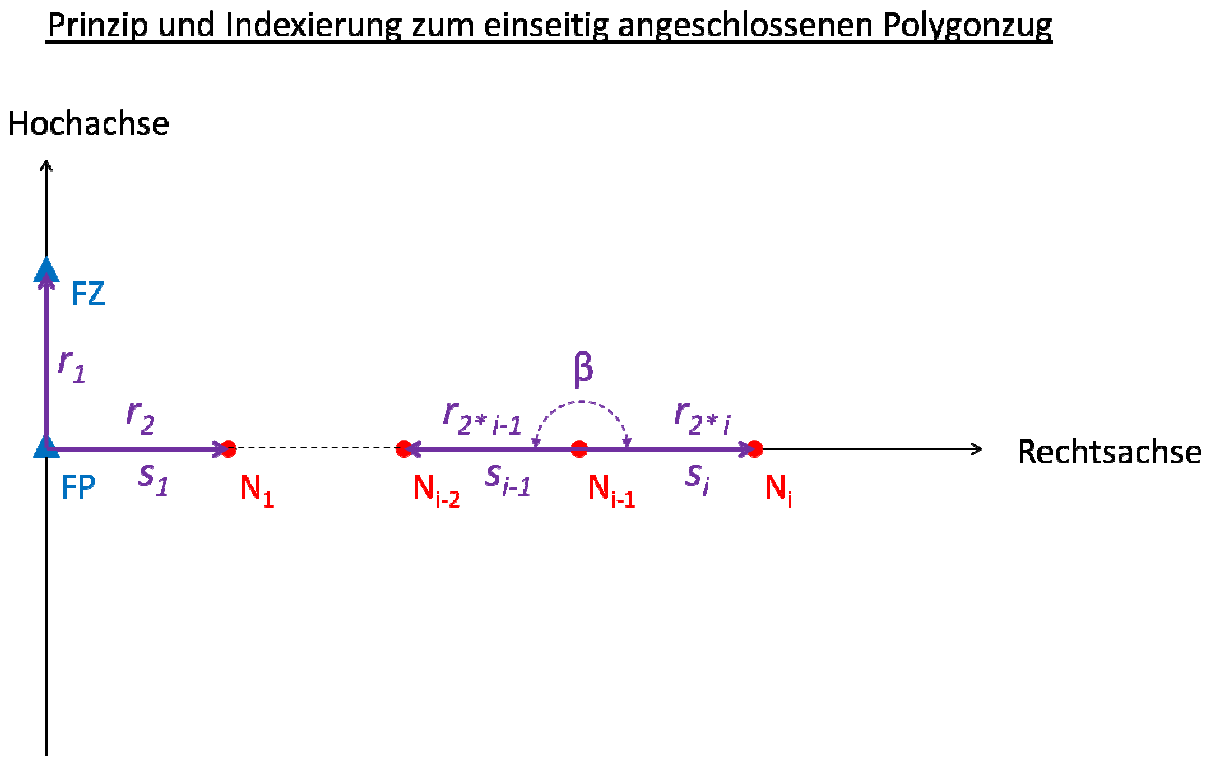
$$Y_1 = s_1 * sin(t_1) \qquad \text{(A.5.10.7a)}$$

$$X_1 = s_1 * cos(t_1) \qquad \text{(A.5.10.7b)}$$

Tab. (A.5.10.4): Nomenklatur der beobachtungsbezogenen Indexierung im einseitig angeschlossenen Polygonzug:

Von	FP		N_1		N_2		$\dots$	N_{i-1}		N_i	
Nach	FZ	N_1	FP	N_2	N_1	N_3	$\dots$	N_{i-2}	N_i	N_{i-1}	N_{i+1}
Richtung	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	$\dots$	r_{2*i-1}	r_{2*i}	r_{2*i+1}	r_{2*i+2}
Strecke	-	s_1	-	s_2	-	s_3	$\dots$	-	s_i	-	s_{i+1}

Abb. (A.5.10.1) Prinzipskizze und Indexierung zum einseitig angeschlossenen Polygonzug:



Mit (A.5.10.2) lässt sich unter Verwendung der Orientierungsunbekannten o_1 des Standpunktes FP ersetzen $t_1 = r_2 + o_1$ und mit (A.5.10.3) weiter substituieren $o_1 = t_{FZ} - r_1$ zu $t_1 = r_2 + t_{FZ} - r_1$. Es ergibt sich

$$Y_1 = s_1 * sin(r_2 - r_1 + t_{FZ}) \qquad \text{(A.5.10.8a)}$$

$$X_1 = s_1 * cos(r_2 - r_1 + t_{FZ}) \qquad \text{(A.5.10.8b)}$$

Für die Koordinaten des zweiten Brech- bzw. Neupunktes (N_2) gilt analog

$$Y_2 = Y_1 + s_2 * sin(t_2) = s_1 * sin(r_2 - r_1 + t_{FZ}) + s_2 * sin(t_2)$$

$$X_2 = X_1 + s_2 * cos(t_2) = s_1 * cos(r_2 - r_1 + t_{FZ}) + s_2 * cos(t_2)$$

In Polygonzügen ergibt sich der Richtungswinkel t_i für das polare Anhängen des i-ten Brechpunktes N_i an den vorigen N_{i-1} als Summe von dessen Richtungswinkel t_{i-1} und dem auf N_{i-1} beobachteten Brechungswinkel β vermindert um 200 gon: $t_i = t_{i-1} + \beta - 200$ gon. Für die vorzeichengerechte Bildung von β ist die rückwärts (also zu N_{i-2}) beobachtete Richtung (hier: r_{2*i-1}) von der vorwärts (also zu N_i) beobachteten Richtung (hier: r_{2*i}) abzuziehen: $\beta = r_{2*i} - r_{2*i-1}$. Es ergibt sich konkret für N_2: $\beta = r_4 - r_3$ und damit $t_2 = t_1 + r_4 - r_3 - 200$ gon $= r_2 - r_1 + t_{FZ} + r_4 - r_3 - 200$ gon.

Für die Koordinaten des zweiten Brechpunktes N_2 folgt daraus

$$Y_2 = s_1 * sin(r_2 - r_1 + t_{FZ}) + s_2 * sin(r_2 - r_1 + t_{FZ} + r_4 - r_3 - 200 \text{ gon}) \quad \text{(A.5.10.9a)}$$

$$X_2 = s_1 * cos(r_2 - r_1 + t_{FZ}) + s_2 * cos(r_2 - r_1 + t_{FZ} + r_4 - r_3 - 200 \text{ gon}) \quad \text{(A.5.10.9b)}$$

Die rekursive Anwendung dieser Richtungswinkelbestimmung führt in Verbindung mit der Struktur der beiden Beziehungen (A.5.10.9a) und (A.5.10.9b) zu folgender allgemeiner Koordinatenbildung für

$$Y_j = \sum_{i=1}^{j} \left(s_i * sin\left(\sum_{k=1}^{i} (r_{2*k} - r_{2*k-1}) + t_{FZ} - (i-1) * 200 \text{ gon} \right) \right) \quad \text{(A.5.10.10a)}$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{j} \left(s_i * cos\left(\sum_{k=1}^{i} (r_{2*k} - r_{2*k-1}) + t_{FZ} - (i-1) * 200 \text{ gon} \right) \right) \quad \text{(A.5.10.10b)}$$

Die partiellen ersten Ableitungen lauten im einseitig angeschlossenen Polygonzug für die Richtungen:

Mit $k \leq j$:

$$Y_j'(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.10.11a)}$$

$$X_j'(r_{2*k-1}) = \sum_{l=k}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.10.11b)}$$

$$Y_j'(r_{2*k}) = \sum_{l=k}^{j} \left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.10.11c)}$$

$$X_j'(r_{2*k}) = -\sum_{l=k}^{j} \left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l} (r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200 \right) \right) \quad \text{(A.5.10.11d)}$$

und für die Strecken mit $n \leq j$:

$$Y_j'(s_n) = sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \tag{A.5.10.12a}$$

$$X_j'(s_n) = cos\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \tag{A.5.10.12b}$$

Die partiellen zweiten Ableitungen lauten im einseitig angeschlossenen Polygonzug:

Mit $k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.10.13a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.10.13b}$$

mit $k \leq j$, $q \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q}) =$$

$$\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.10.14a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q}) =$$

$$\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.10.14b}$$

mit $q < k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q-1}) =$$

$$-\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \tag{A.5.10.15a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1}, r_{2*q-1}) = \tag{A.5.10.15b}$$

$$-\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(l-1)*200\right)\right)$$

mit $k \leq n \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k-1},s_n) = -cos\left(\sum_{m=1}^{n}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(n-1)*200\right) \tag{A.5.10.16a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k-1},s_n) = sin\left(\sum_{m=1}^{n}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(n-1)*200\right) \tag{A.5.10.16b}$$

mit $k \leq j$, $q \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k},r_{2*q-1}) =$$

$$\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(l-1)*200\right)\right) \tag{A.5.10.17a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k},r_{2*q-1}) =$$

$$\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(l-1)*200\right)\right) \tag{A.5.10.17b}$$

mit $q < k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k},r_{2*q}) =$$

$$-\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(l-1)*200\right)\right) \tag{A.5.10.18a}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k},r_{2*q}) =$$

$$-\sum_{l=max(k,q)}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m}-r_{2*m-1})+t_{FZ}-(l-1)*200\right)\right) \tag{A.5.10.18b}$$

mit $k \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * sin\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \quad \text{(A.5.10.19a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k}) = -\sum_{l=k}^{j}\left(s_l * cos\left(\sum_{m=1}^{l}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (l-1) * 200\right)\right) \quad \text{(A.5.10.19b)}$$

mit $k \leq n \leq j$:

$$Y_j^{(2)}(r_{2*k}, s_n) = cos\left(\sum_{m=1}^{n}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20a)}$$

$$X_j^{(2)}(r_{2*k}, s_n) = -sin\left(\sum_{m=1}^{n}(r_{2*m} - r_{2*m-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n, r_{2*k-1}) = -cos\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20c)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, r_{2*k-1}) = sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20d)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n, r_{2*k}) = cos\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20e)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, r_{2*k}) = -sin\left(\sum_{p=1}^{n}(r_{2*p} - r_{2*p-1}) + t_{FZ} - (n-1) * 200\right) \quad \text{(A.5.10.20f)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_n) = 0 \quad \text{(A.5.10.20g)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n) = 0 \quad \text{(A.5.10.20h)}$$

mit $q < j$:

$$Y_j^{(2)}(s_n, s_q) = 0 \quad \text{(A.5.10.21a)}$$

$$X_j^{(2)}(s_n, s_q) = 0 \quad \text{(A.5.10.21b)}$$

$$Y_j^{(2)}(s_q, s_n) = 0 \quad \text{(A.5.10.21c)}$$

$$X_j^{(2)}(s_q, s_n) = 0 \quad \text{(A.5.10.21d)}$$

A.5.11 Der GUM (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*)

Der *GUM* kann entsprechend seiner Bezeichnung als ein Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen angesehen werden und entstand 1993 aufgrund der Motivation, einen international gültigen einheitlichen Umgang mit der Angabe von Messunsicherheiten festzulegen und dabei vor allem die im Rahmen der Gauß'schen Fehlerrechnung weitgehend unbeachtet gebliebenen systematischen Fehleranteile mit einzubeziehen. In den Jahren 1999 und 2008 wurde der GUM durch den dafür zuständigen Zusammenschluss internationaler Institute *JCGM* (*Joint Committee for Guides in Metrology*) aktualisiert und ergänzt.

Im Konzept des GUM wird idealisiert die sog. *Messgröße* m als in der Regel nicht bekannter wahrer Wert für eine Größe Y angenommen, welche sich anhand diskreter und einer bestimmten Verteilung folgender *Messwerte* empirisch bestimmen lässt. Die Differenzen dieser Messwerte zum wahren Wert werden als *Messabweichung* bezeichnet und sind im Falle eines unbekannten wahren Wertes ebenfalls nicht genau bekannt.
Als Maß für die Streuung der Messgröße sieht der GUM daher schließlich die (*Mess-*) *Unsicherheit* u (uncertainty) als Schätzwert für die Messabweichung vor (SCHENK et al. 2014); mit der Differenz u zur Messgröße m führt der GUM ferner das *Messergebnis* y als idealisierten Messwert ein.

	±	Messabweichung	=	Messwert
Messgröße m		↕ ≈		↕ ≈
	±	(Mess-) Unsicherheit u	=	Messergebnis y

Im Sinne des GUM sollen nun prinzipiell die – klassisch getrennten – systematischen und zufälligen (statistischen) Fehler- bzw. Varianzanteile auf einer gemeinsamen Grundlage zweier Kategorien (*A* und *B*) behandelt und dabei als Standardabweichungen (gem. GUM *Standardunsicherheiten* u) bzw. Varianzen ermittelt und angegeben werden:

- Unsicherheiten des Typs A:
  Ermittlung anhand statistischer Methoden (z.B. Standardabweichung des Einzelwertes oder des Mittels einer Stichprobe).
- Unsicherheiten des Typs B:
  Nicht anhand statistischer Methoden ermittelt → Zuordnung der zur betrachteten Größe adäquaten statistischen Verteilung (Dichteannahme, z.B. Normal-, Poisson- oder Gleichverteilung) und Angabe der Standardabweichung auf der Grundlage jener Verteilung.

Die zufälligen Varianzanteile können nach beiden Typen angegeben werden, ohne dass die Angabe nach Typ B nachteilig sein muss, da Angaben nach Typ A empirisch und somit auf der Grundlage einer diskreten Stichprobe selber unsicher sind. Systematische Fehleranteile werden als statistisch

aufgefasst und ihnen somit ein quasi-zufälliger Status verliehen (GRABE 2000), womit sie nach Typ B behandelbar werden.

Der GUM sieht ferner die sog. *erweiterte Unsicherheit* U des Messergebnisses y vor, welche sich aus der Standardunsicherheit u und dem sog. Erweiterungsfaktor k wie folgt ergibt:

$$U = k * u(y).$$

Daraus ergibt sich als *Überdeckungswahrscheinlichkeit* bzw. *Grad des Vertrauens* der Bereich

$$y - U \leq Y \leq y + U$$

welcher den Anteil p der Wahrscheinlichkeitsverteilung umfasst, von dem die sinnvolle Zuordnung der gemessenen Größe y erwartet werden kann (SCHENK et al. 2014). Der GUM schlägt im Sinne einer plausiblen Überdeckungswahrscheinlichkeit $k = 2$ vor, was im Falle normalverteilter Beobachtungen einem Anteil von $p \approx 95\,\%$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Grundgesamtheit der Beobachtungen entspricht.

Die Anwendung des GUM wird insbesondere wegen der formalen Behandlung der systematischen Fehleranteile wie im Sinne zufälliger Anteile kritisiert (GRABE 2000).

A.6.1 Beispiele für langwellige Schwachformen in ausgedehnten Lagenetzen

Die vektoriell dargestellten Schwachformen der folgenden drei Abbildungen (A.6.1.1) bis (A.6.1.3) stellen die Abweichungen zwischen den frei ausgeglichenen Lagenetzpunkten und deren zugehörigen Soll-Koordinaten des ITRF-Bezugs dar.

Abb. (A.6.1.1) Langwellige Schwachform im Landesnetz *Rheingrenze* bis 1.0 m nach eigenen Berechnungen:

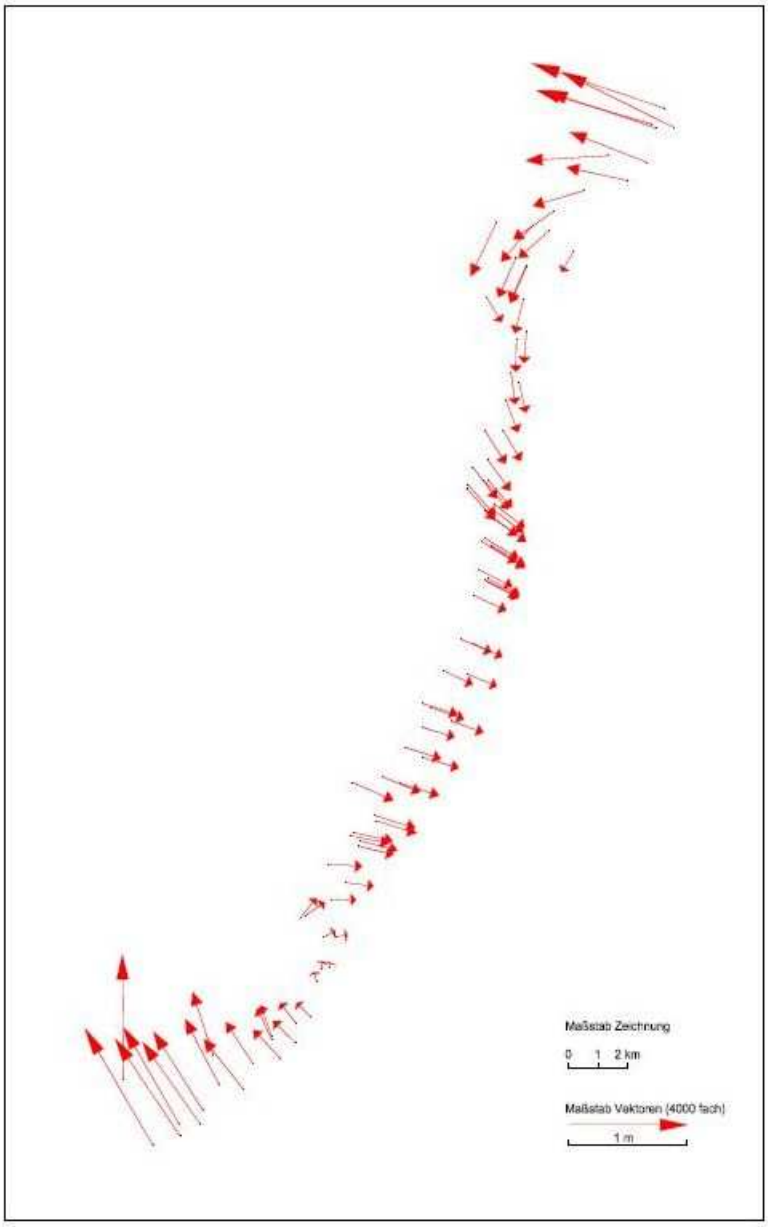


Abb. (A.6.1.2) Langwellige Schwachform im DHDN bis 2.5 m aus DERENBACH et al. (2006):

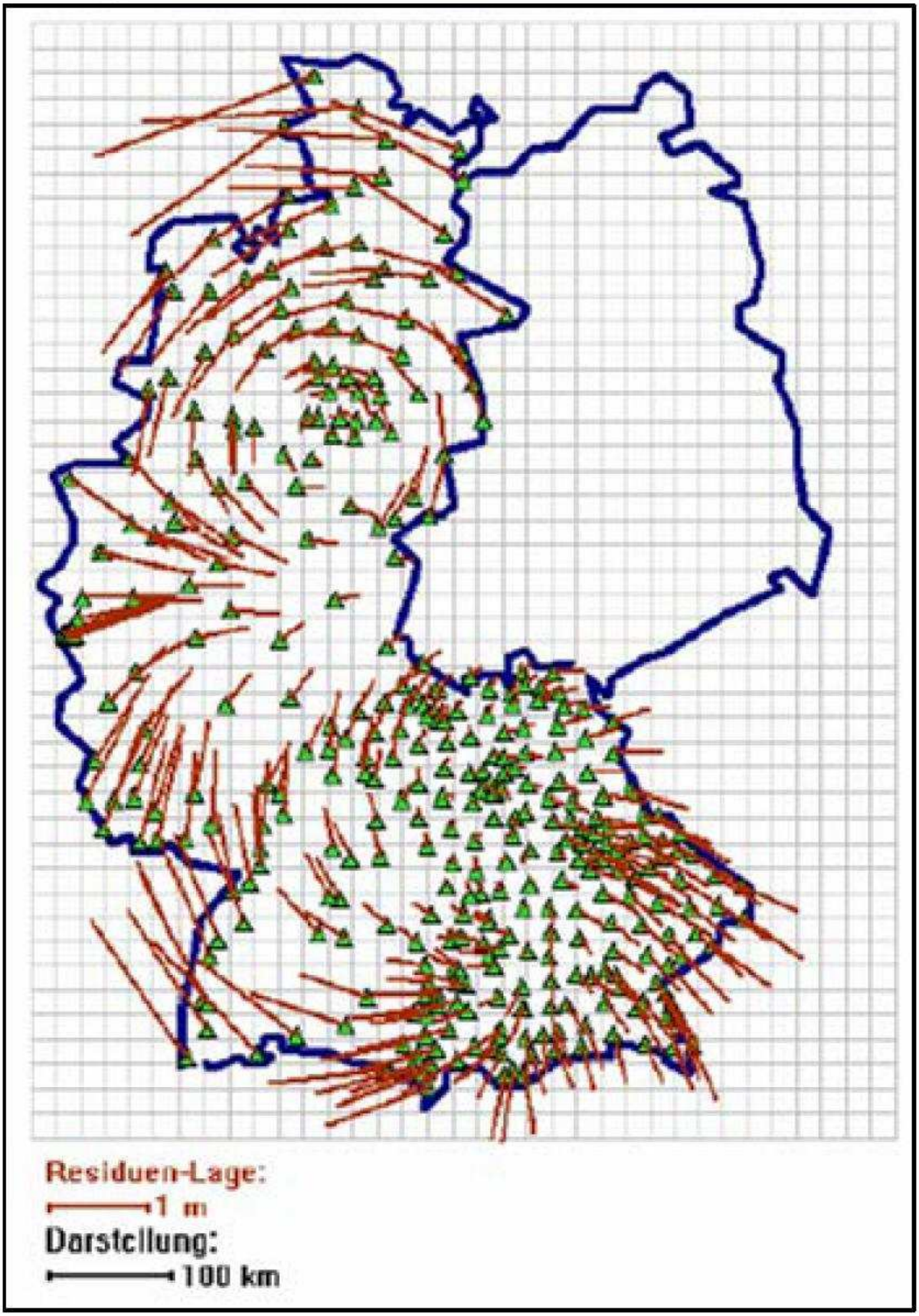
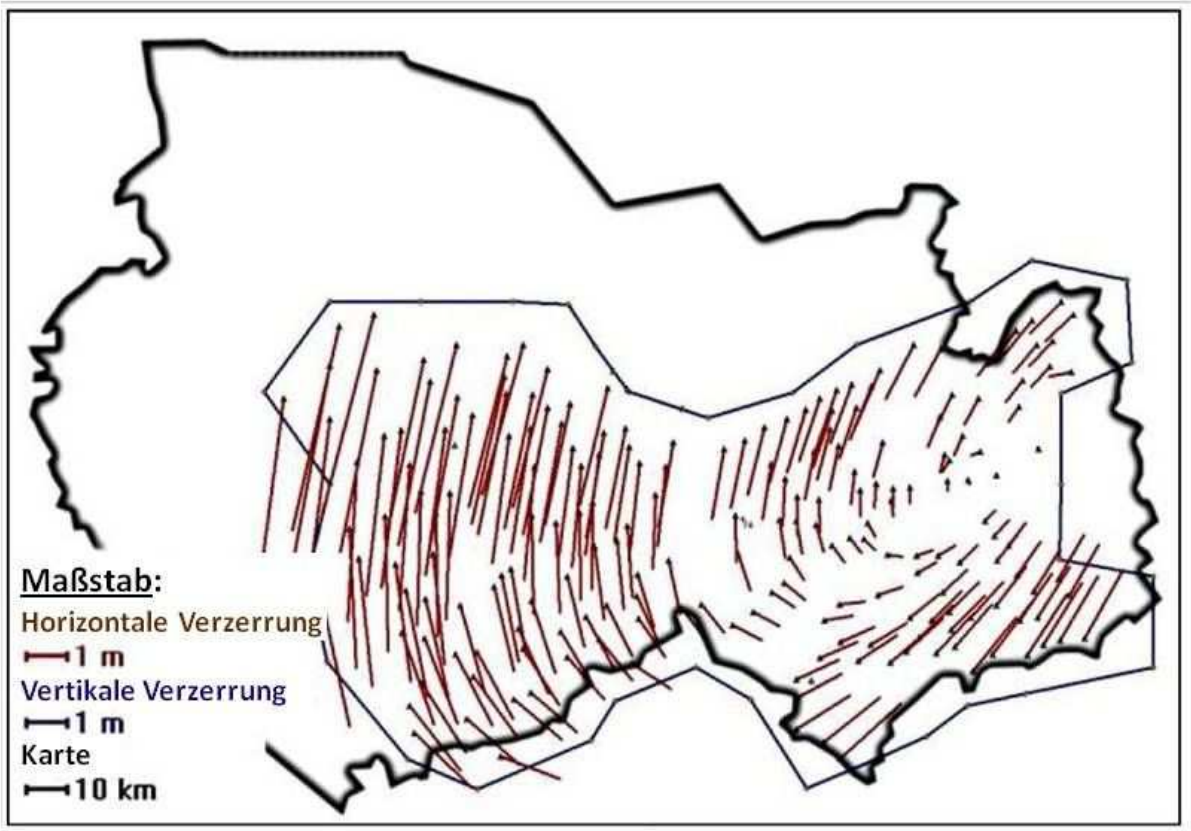


Abb. (A.6.1.3) Langwellige Schwachform im Landesnetz *Nowosibirsk* bis 4.5 m aus JÄGER et al. (2012):



A.6.2 Das Festpunktnetz *Hamburgisches Wattenmeer*

A.6.2.1 Allgemeines und Bestandsprüfung

Das Gebiet des Hamburgischen Wattenmeeres, welches rechtlich-geografisch auf den Staatsvertrag von 1969 zwischen Hamburg und Niedersachsen zurückgeht, umfasst neben der zentral gelegenen Hauptinsel Neuwerk noch die beiden Vogelschutzinseln Scharhörn und Nigehörn im umgebenden Inselwatt.

Diese Exklave der Kernstadt Hamburg ist mit einer Größe von 137,5 km² seit dem 9. April 1990 als *Nationalpark Hamburgisches Wattenmeer* umgewidmet und gehört seit dem 27. Juni 2011 zum UNESCO-Weltnaturerbe.

Im Vorgriff auf das ehemals geplante Projekt eines Tiefwasserhafens nahe der Insel Scharhörn wurden in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts im Bereich der Inseln und des Inselwatts insgesamt 25 geodätische Festpunkte in unregelmäßiger geographischer Verteilung festgelegt als entweder

- Trigonometrische Punkte (TPs) und bzw. oder
- Präzisionshöhenfestpunkte als sog. *Rohrfestpunkte* (RFPs) oder
- Präzisionshöhenfestpunkte als sog. *Unterirdische Festlegungspunkte* (UFPs)

Die Präzisionshöhenfestpunkte sind jeweils nach *Hamburger Bauart* (GROßMANN & KAHMEN 1988) ausgestaltet und weisen eine Durchmarkung der oberflächennahen Alluvialböden bis zum tragfähigen Diluvium (TORGE 1975, RICHTER 1986) auf.

Dieses Festpunktfeld hat mit dem Stand einer Sicht- und Meßprüfung von Juni 2007 folgenden Status:

1. Zwölf vorhandene und gebrauchsfähige Festpunkte:

Aus dieser Gruppe konnten zehn Festpunkte direkt mit RTK-Methoden und zwei über das Verfahren der RTK-Tachymetrie (TP 1/2016 und RFP 3107) beobachtet werden. Die direkte RTK-Beobachtung des TP 52/2016 (RFP 5503) ist jedoch aufgrund der unsicheren Zentrumsauffassung seiner sehr tief liegenden Vermarkung im Mischwatt für geodätische Genauigkeitsbelange nicht verwertbar.
Die noch gebrauchsfähigen Festpunkte sind in sechs von zwölf Fällen als Festpunkt-Union von TP und RFP ausgebildet und dabei als RFP (ohne Schutzkasten) vermarkt.
Die drei klassischen Boden-TPs liegen als TP-Pfeiler (mit Grundplatte) vor und zwei klassische RFPs sind als solche (mit Schutzkasten) vermarkt, wobei im Falle von RFP 1401 eine exakte historische Lagekoordinate vorliegt und RFP 3107 nach Anhang 6.6 den vertikalen Datumspunkt für die Insel Neuwerk realisiert. Darüber hinaus existiert mit einem Exzentrum des reinen TP (1) 1/2016 ein Hochpunkt in Form des Neuwerker Leuchtturms (Windfahne).

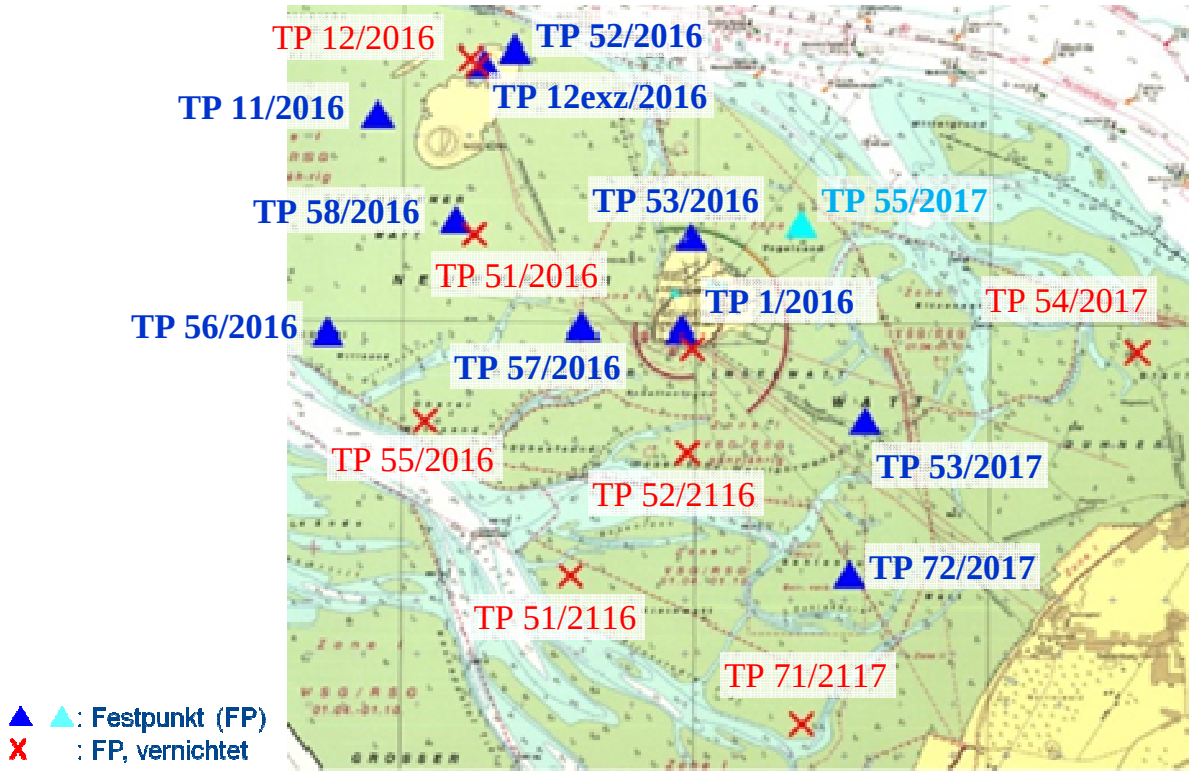
2. Vier infolge der Tiefe ihrer Vermarkung unterhalb der Geländeoberkante bisher nicht aufgegrabene und daher nicht prüffähige Festpunkte:

Hier handelt es sich um die Festpunkt-Union TP 55/2017 (RFP 6106) im Inselwatt sowie um die zwei UFPs 1901 und 1902 und um die Bodenfestlegung von TP 51/2017, jeweils auf der Insel Neuwerk.

3. Neun definitiv untergegangene Festpunkte:

Sieben dieser Festpunkte waren in Festpunkt-Union als TP und gleichermaßen RFP vorgesehen und als RFP (ohne Schutzkasten) vermarkt, wobei jedoch den beiden TPs 51/2016 und 51/2116 aufgrund ihrer sehr frühzeitigen Vernichtung keine Höhenkoordinate mehr zugeschrieben werden konnte.
Der Pfeiler des klassischen Boden-TPs 12/2016 musste 1984 aus Sicherheitsgründen aufgrund der allmählichen Inselverlagerung Scharhörns nach Osten aufgegeben und entfernt werden, Ersatz ist TP 12exz/2016. Ferner ist der (reine) UFP 1903 auf der Insel Neuwerk vernichtet.
Es ist unter Berücksichtigung der meteorologischen und maritimen Bedingungen im Bereich des Hamburgischen Wattenmeeres Auskolkung und Eisdruck (DIETRICH et al. 1992) als Ursache für den Untergang der im Inselwatt befindlichen Festpunkte zu vermuten.

Abb. (A.6.2.1) Ergebnis der Bestandsprüfung des Festpunktfeldes *Hamburgisches Wattenmeer*:



Die letzte umfassende Bestandsaufnahme sowie lage- und höhenseitige Bestimmung dieser Festpunkte fand in den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts durch das damalige Hamburger Vermessungsamt (heute: Landesbetrieb für Geoinformation und Vermessung, LGV) statt; als Vorgängerinstitution der heutigen Hamburg Port Authority (HPA) führte das ehemalige Amt für Strom- und Hafenbau in den

achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts im Rahmen verschiedener Aufträge Vermessungsarbeiten durch, welche sich auf einige dieser Festpunkte als Ausgangspunkte stützten, jedoch diese selber nicht prüften.

Im Vorgriff auf die geplante RTK-Meßkampagne wurde eine örtliche Beschau der Festpunktprüflinge in den Jahren 2005 und 2006 durchgeführt; es wurden dabei ausschließlich eindeutige Punktzentren vorgefunden und die allgemeine mechanische Unversehrtheit der Prüfpunkte festgestellt.

A.6.2.2 Historische und GNSS-gestützte Georeferenzierung

Für die Belange dieser Arbeit spielen vertikale Georeferenzierungen keine Rolle, so dass sich die folgenden Betrachtungen auf die Festlegung des horizontalen geodätischen Datums beschränken.

Die Ersttriangulation erfolgte 1961 durch das damalige Niedersächsische Landesvermessungsamt (LVA) unter der Leitung von W. Höpcke vom Geodätischen Institut der Universität Hannover.
Das historische Lagedatum stellt sich grundsätzlich als das Datum der TPs und RFP 1401 gemäß jener Ersttriangulation dar, mit Berücksichtigung der Netzverdichtungsstufe von 1963 durch das ehemalige Vermessungsamt Hamburg und der weiteren Verdichtungsstufe und Neutriangulation von 1968 erneut unter der Leitung von W. Höpcke. In dieser Form bilden die Lagekoordinaten den Vergleichsbezug für die neuzeitliche GNSS-gestützte Beobachtung des Festpunktfeldes.

Zur Realisierung des GNSS-gestützten Lagebezuges im Bereich der Insel Neuwerk erfolgte zunächst die RTK-Beobachtung einzelner Bodenfestpunkte ebendort und unter Verwendung des offiziellen Parametersatzes der AdV für den Übergang auf den Lagestatus 100 in der Version „DREF-BRD“.

Die Zentimeter-Genauigkeit des hier eingesetzten, GNSS-gestützten Prüfverfahrens (SAPOS-HEPS-Modus mit Flächenkorrekturparametern) ist ausreichend bekannt durch z.B. BRUNKHORST & NODOP (1999) und BAUER (2003).

Die auf jene Weise auftretenden Differenzen zwischen historischer und beobachteter Lagekoordinate wurden nach einem auf der Methode-der-Kleinsten-Quadrate beruhenden Verfahren (Anhang 6.5) als Beobachtungen für die maßstabs- und orientierungstreue Anpassung des verwendeten Parametersatzes „DREF-BRD“ an das (amtliche) Lagedatum der Inselfestpunkte verwendet und somit ein für diese Festpunkte bestpassender 7-Parametersatz mit der Bezeichnung *Neuwerk* ermittelt, welcher auch der Referenzierung der RTK-Lagebeobachtungen der Festpunktprüflinge des Inselwatts dienen soll.

A.6.2.3 GNSS-gestützte Prüfung des Lagefestpunktfeldes

A.6.2.3.1 Festlegung von Ist- und Soll-Bezug

Zur Erzielung von Kongruenzaussagen zwischen den beiden gegebenen Lagebezügen

- amtliche Lagekoordinaten im historischen Datum (Lagestatus 100)

- RTK-Lagekoordinaten im Parametersatz-gestützten Datum *Neuwerk* (Lagestatus 100)

soll der letztgenannte Bezug Sollwert-Charakter erhalten, weil die nach BRUNKHORST & NODOP (1999) statistisch zu erwartende RTK-Lagemeßgenauigkeit im für die Prüfung der Festpunkte angewendeten SAPOS-HEPS-Modus von ± 17 mm (1σ) als besser gegenüber der Genauigkeit der historischen Lagekoordinaten angenommen wird. Somit wird das historische Lagedatum zum Ist-Bezug.

A.6.2.3.2 Funktionales Modell

Aufgrund der Art der zu lösenden Aufgabe kommt die Methode-der-Kleinsten-Quadrate zum Zuge; das funktionale Modell für die Abbildung der gesuchten Parameter auf die als Koordinatendifferenzen eingeführten Beobachtungen (s.u.) ist geeignet aufzustellen.

Unter Beachtung der Netzgeometrie der Ersttriangulation mit TP 1/2016 als festem Ausgangspunkt mit vier festen Richtungsanschlüssen und polar angehängten Neupunkten sowie zusätzlichen Beobachtungen zwischen diesen Neupunkten kann die Abbildung des Ist- auf den Soll-Bezug anhand einer Drehstreckung mit möglichem Shift des Ausgangspunktes in beiden Koordinatenrichtungen passend modelliert werden, da der Abriß auf TP 1/2016 die Netzbestimmungsfigur geometrisch dominiert.
Die beiden Freiheitsgrade zur Modellierung des Shifts in Rechts- und Hochachsrichtung tragen dem indirekten Anschluss der Ersttriangulation an TP 1/2016 als Standpunktzentrierung Rechnung, welche erforderlich wurde, da sich die Lagekoordinaten dieses Festpunktes auf seine Windfahne als herabgelegtes Punkt-Exzentrum beziehen.

Die Anwendung einer 4-Parameter-Ähnlichkeitstransformation (Helmerttransformation) kommt für die Lösung der Aufgabe nicht in Betracht, da für das horizontale geodätische Datum der betrachteten Netzmasche der Abriß auf TP 1/2016 prägend und datumsgebend wirksam ist und sich infolgedessen mögliche Verschwenkungsfehler bei der Ausrichtung diese Masche auf den Standpunkt TP 1/2016 der datumsgebenden Richtungssatzbeobachtung und nicht wie im Zuge der Helmerttransformation auf den Koordinatenschwerpunkt der Prüflinge als Drehpunkt beziehen müssen.

Der Vektor der Parameter $\boldsymbol{x}$ ergibt sich daher aus den vier einhergehenden Freiheitsgraden für diese Abbildung mit Drehwinkel φ, Maßstab m und Rechts- (ΔRe) und Hochwertverschiebung (ΔHo) zu

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \varphi \\ m \\ \Delta Re \\ \Delta Ho \end{pmatrix} \tag{A.6.2.1}$$

Führt man im Ist- und im Soll-System die Koordinatendifferenzen jedes Prüflings zum Ausgangspunkt der Drehstreckung (TP 1/2016) mit seinen amtlichen Koordinaten formal wie Basislinien ein als

$$\boldsymbol{l_{Ist}} = \begin{pmatrix} \Delta Re_{Ist} \\ \Delta Ho_{Ist} \end{pmatrix} \tag{A.6.2.2a}$$

$$\boldsymbol{l_{Soll}} = \begin{pmatrix} \Delta Re_{Soll} \\ \Delta Ho_{Soll} \end{pmatrix} \tag{A.6.2.2b}$$

und modelliert deren Relativbezug mit einem Drehwinkel φ in geodätischer Zählrichtung sowie einem Maßstabsfaktor m über eine Drehstreckungsmatrix $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} m * cos(\varphi) & m * sin(\varphi) \\ -m * sin(\varphi) & m * cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{A.6.2.3}$$

und dem Shift-Vektor $\begin{pmatrix} \Delta Re \\ \Delta Ho \end{pmatrix}$ zu

$$\boldsymbol{l_{Soll}} = \boldsymbol{D} * \boldsymbol{l_{Ist}} + \begin{pmatrix} \Delta Re \\ \Delta Ho \end{pmatrix} \tag{A.6.2.4}$$

so ergibt sich aus (A.6.2.4) mit (A.6.2.3), (A.6.2.2a) und (A.6.2.2b) ausgeschrieben

$$\Delta Re_{Soll} = m * cos(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + m * sin(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} + \Delta Re \tag{A.6.2.5a}$$

$$\Delta Ho_{Soll} = -m * sin(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + m * cos(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} + \Delta Ho \tag{A.6.2.5b}$$

bzw. als Verbesserungsgleichungen

$$v_{Re} = m * cos(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + m * sin(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} + \Delta Re - \Delta Re_{Soll} \tag{A.6.2.6a}$$

$$v_{Ho} = -m * sin(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + m * cos(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} + \Delta Ho - \Delta Ho_{Soll} \tag{A.6.2.6b}$$

Hierin ist die Struktur der Designmatrix $\boldsymbol{A}$ erkennbar als

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \delta f(\varphi)_{Re} & \delta f(m)_{Re} & \delta f(\Delta Re)_{Re} & \delta f(\Delta Ho)_{Re} \\ \delta f(\varphi)_{Ho} & \delta f(m)_{Ho} & \delta f(\Delta Re)_{Ho} & \delta f(\Delta Ho)_{Ho} \end{pmatrix} \tag{A.6.2.7}$$

mit

$$\delta f(\varphi)_{Re} = -m * sin(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + m * cos(\varphi) * \Delta Ho_{Ist}$$

$$\delta f(\varphi)_{Re} = m * (cos(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} - sin(\varphi) * \Delta Re_{Ist}) \tag{A.6.2.8a}$$

$$\delta f(m)_{Re} = cos(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + sin(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} \tag{A.6.2.8b}$$

$$\delta f(\Delta Re)_{Re} = 1 \tag{A.6.2.8c}$$

$$\delta f(\Delta Ho)_{Re} = 0 \tag{A.6.2.d}$$

$$\delta f(\varphi)_{Ho} = -m * cos(\varphi) * \Delta Re_{Ist} - m * sin(\varphi) * \Delta Ho_{Ist}$$

$$\delta f(\varphi)_{Ho} = -m * (cos(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + sin(\varphi) * \Delta Ho_{Ist}) \tag{A.6.2.8e}$$

$$\delta f(m)_{Ho} = -sin(\varphi) * \Delta Re_{Ist} + cos(\varphi) * \Delta Ho_{Ist} \tag{A.6.2.8f}$$

$$\delta f(\Delta Re)_{Ho} = 0 \tag{A.6.2.8g}$$

$$\delta f(\Delta Ho)_{Ho} = 1 \tag{A.6.2.8h}$$

und der Vektor der gekürzten Beobachtungen $\boldsymbol{l}$ erkennbar als

$$\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} \Delta Re_{Soll} \\ \Delta Ho_{Soll} \end{pmatrix} = \boldsymbol{l_{Soll}} \tag{A.6.2.9}$$

A.6.2.3.3 Stochastisches Modell

Das stochastische Modell der Beobachtungen bildet sich in der Stochastik der Koordinatendifferenzen im Ist- und Soll-System ab. Hierin sind zwar Korrelationen zwischen diesen Differenzen aufgrund der Art ihrer Bildung anzunehmen, jedoch kaum zu bemessen und daher ohne Belastung des Sachverhalts vernachlässigt. Unter der Annahme gleichgenauer Koordinatendifferenzen geht die Gewichtsmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{P_{ll}}$ in die Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ über und verhält sich so im Algorithmus für die Ausgleichung nach der Methode-der-Kleinsten-Quadrate neutral.

A.6.2.3.4 Randbedingungen zur Ausgleichung

Hinsichtlich der zu erwartenden Größenordnungen der unbekannten Parameter seien deren Näherungswerte zu Beginn der Ausgleichung für den Maßstabsfaktor gleich eins ($m_0 = 1$) und für die übrigen drei zu schätzenden Parameter gleich Null gesetzt.

Da mit dem Drehwinkel φ mindestens ein Parameter im funktionalen Modell in nicht linearer Form auftritt, ist der Ausgleichungsalgorithmus iterativ zu verwenden und einer Konvergenz beliebiger Schärfe zuzuführen. Der zugehörige Eintrag des linearisierten Parameters hat im Parametervektor die Eigenschaft eines differentiellen Zuschlags; die übrigen Einträge hingegen stellen zwar unmittelbar die gesuchten Parameter dar, iterieren aber so lange, bis alle differentiellen Zuschläge ausreichend gegen Null konvergieren.
Idealerweise sollten die Einträge der $\boldsymbol{A}$-Matrix eine einheitliche Größenordnung aufweisen. So bliebe die Normalgleichungsmatrix $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T * \boldsymbol{P_{ll}} * \boldsymbol{A}$ homogen und ihre Inverse $\boldsymbol{Q_{xx}} = \boldsymbol{N}^{-1}$ numerisch stabil (KAHMEN 1986). Der Aufbau des funktionalen Modells im Sonderfall der Drehstreckung mit Lageshift macht hingegen Koeffizienteneinträge erforderlich, die sich um bis zu $7*10^3$ unterscheiden und somit die o.g. Homogenitätsforderung der $\boldsymbol{N}$-Matrix erheblich verletzen. Infolgedessen sind hier stets mehr als nur zwei Iterationen anzuwenden, um eine ausreichende Konvergenz der Ausgleichung mit einem Restfehler von weniger als 1 mm für die Parameter des Lageshifts zu erzielen.

A.6.2.3.5 Ergebnisse

Es ergeben sich für die Abweichung des Ist- vom Soll-Bezug folgende Parameter mit zugehöriger einfacher Standardabweichung unter Anwendung der vorstehenden Methode an neun Prüflingen:

- Drehwinkel = 0.8 mgon ± 0.2 mgon
- Maßstabsfaktor = 1.0 ppm ± 2.5 ppm
- Rechtswertshift = -8 mm ± 15 mm
- Hochwertshift = 43 mm ± 15 mm

Der Erwartungswert ist für alle geschätzten Parameter gleich Null, so dass sich zwei nicht signifikante, im Falle des Hochwertshifts mit 2.87σ eine hoch signifikante und im Falle des Drehwinkels mit 4.0σ eine höchst signifikante Abweichung davon erheben.

Der mittlere Punktfehler beträgt ± 43 mm und beinhaltet sowohl das Fehlerbudget der historischen als auch das Fehlerbudget der GNSS-gestützten Einzelpunktbeobachtung, welches zu ± 17 mm angesetzt werden kann (s.o.). Nach Varianzenfortpflanzungsgesetz ergibt sich eine globale Einzelpunktgenauigkeit von ± 39 mm für die historische Punktbestimmung, die somit etwa um den Faktor 2 ungünstiger ist als das hier angewendete GNSS-gestützte Verfahren (BRUNKHORST 2010).
Die größte Einzelpunktablage des ausgeglichenen (angepassten) Ist-Systems vom Soll-System beträgt 63 mm (am TP 58/2016 = RFP 6309) und die größte normierte Verbesserung 1.92 (für den Hochwert ebd.); die zweitgrößte normierte Verbesserung liegt mit 1.71 für den Hochwert von RFP 1401 vor.
Das Beobachtungsmaterial ist also ausreißerfrei und bei $n = 18$ Beobachtungen in Form von Koordinatendifferenzen und $u = 4$ unbekannten Parametern und somit einer mittleren Teilredundanz von

$$r_{Mittel} = \frac{n-u}{n} = \frac{18-4}{18} \approx 0.78$$

nach Niedersächsischem Festpunktfelderlass (NIEDERSÄCHSISCHES MINISTERIUM DES INNERN 1988) als *gut kontrollierbar* zu bezeichnen.

A.6.2.4 Stochastische Wirkung der systematischen Fehleranteile

Die vier ermittelten deterministisch-systematischen Fehleranteile (Drehwinkel, Maßstabsfaktor, Shift für Rechts- und Hochwert) lassen sich zu einem Zuschlag für die parameterbezogene Kovarianzmatrix stochastisch modellieren (JÄGER & LEINEN 1992) und einer spektralen Zerlegung unterziehen (JÄGER et al. 2005).

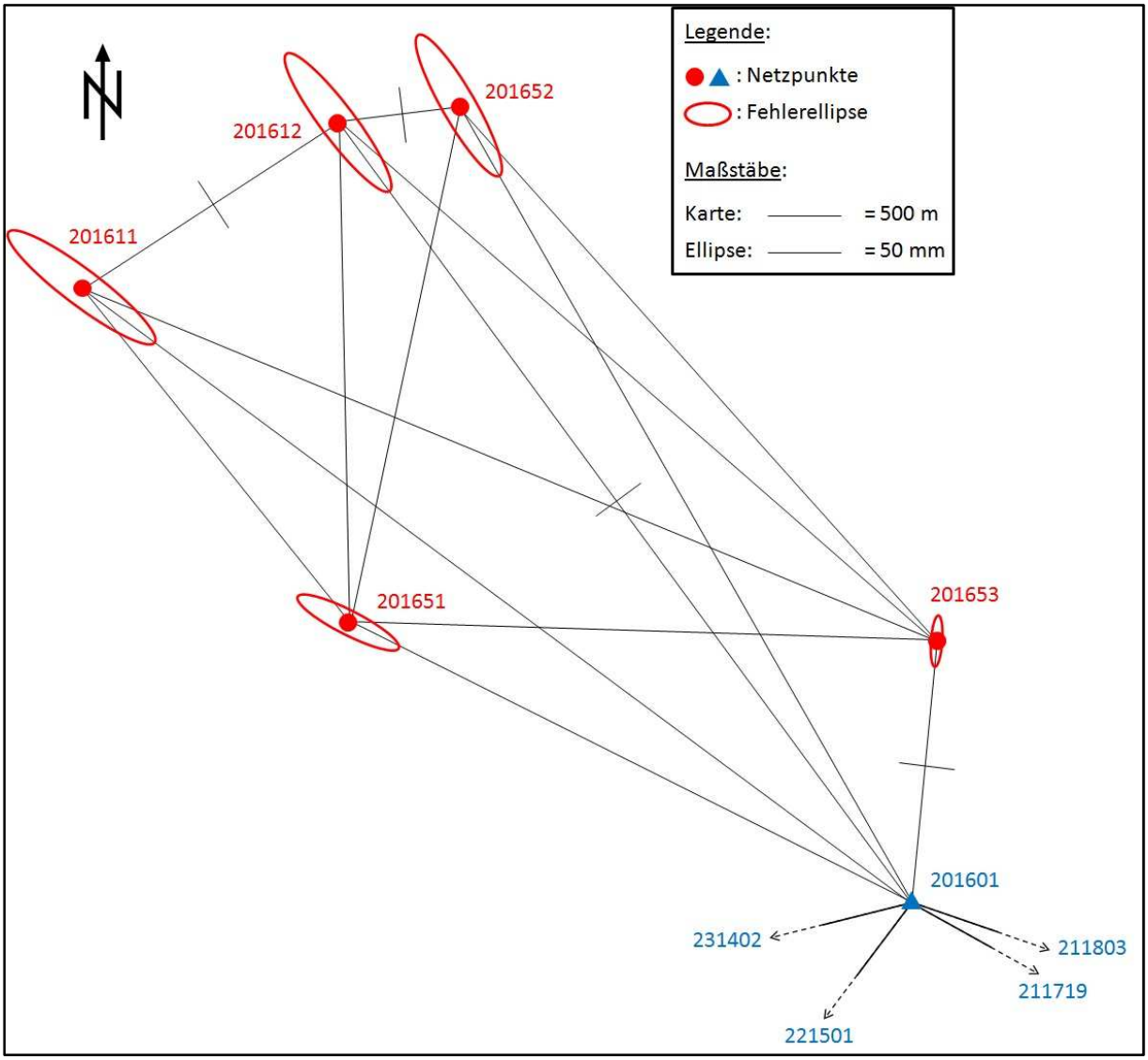
Tab (A.6.2.1) Stochastik der geprüften systematikfehlerbelasteten Neupunkte:

Neu-punkt Nr.	Ohne systematische Fehleranteile				Mit systematischen Fehleranteilen			
	a	b	Φ	M_P	a	b	Φ	M_P
	[mm]	[mm]	[gon]	[mm]	[mm]	[mm]	[gon]	[mm]
201611	62.8	12.4	140.6	64.0	73.1	32.6	158.1	80.0
201612	58.7	11.7	159.3	59.9	72.3	22.8	172.5	75.8
201651	38.9	8.4	129.8	39.8	54.3	28.3	168.8	61.2
201652	55.6	11.4	166.6	56.8	70.5	18.9	177.8	73.0
201653	17.6	3.9	4.3	18.0	46.7	5.3	192.0	47.0

Erwartungsgemäß vergrößert sich der mittlere Neupunktfehler auf maximal das 2.5-fache bzw. um bis zu 29 mm, da ein Hochwertshift von 43 mm im Standpunkt des die Netzfigur dominierenden polaren Anhängens alle Neupunkte unmittelbar geometrisch und stochastisch belastet. Die Verzerrungseffekte der übrigen drei systematischen Fehleranteile sind dagegen vernachlässigbar gering.
Die mit dem Effekt der systematischen Anteile belasteten Fehlerellipsen sind aufgrund der Majorität des Hochwertshifts genähert entlang der Hochachse ausgerichtet, nachdem sie in ihrer unbelasteten

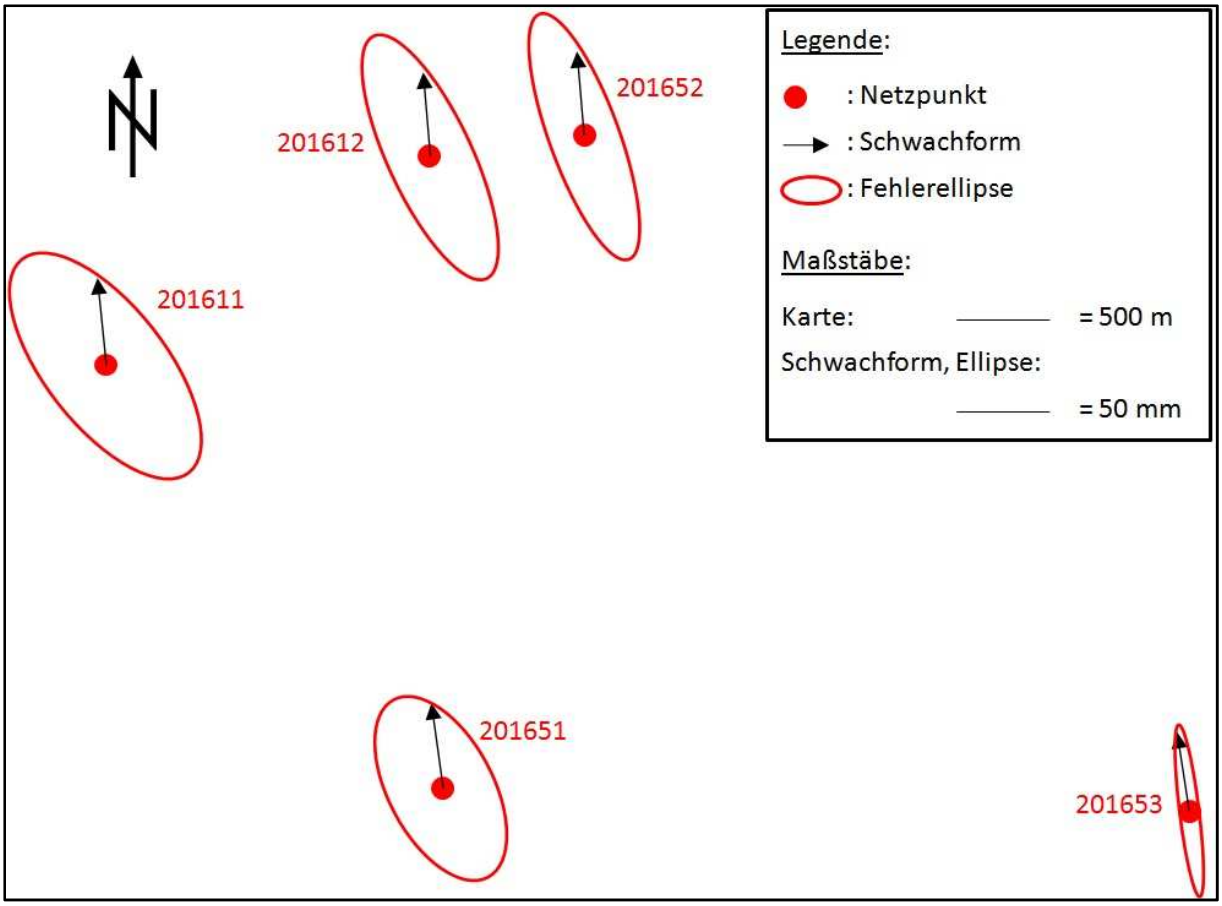
Situation aufgrund der dominant ungünstigen À-priori-Streckenmeßgenauigkeiten genähert entlang der Richtungswinkel des Standpunktes zu den Neupunkten orientiert waren.

Abb. (A.6.2.2a) Netzbild *Wattenmeer* mit Fehlerellipsen ohne Wirkung der systematischen Fehleranteile (unbelastete Situation):



Als objektive Maßzahl der Stärke dieses für die Geometrie und die Stochastik des Netzes verzerrenden Effekts dient die dimensionslose stochastische Netzverzerrung, welche somit auch einen objektiven Vergleich der Verzerrungswirkungen verschiedener Ursachen wie beispielsweise hier deterministisch-systematische Fehler oder stochastisch-systematische Fehler aufgrund von Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Netzbeobachtungen auf dieselbe Netzgeometrie erlaubt. So ergibt sich für den Verzerrungseffekt der deterministischen Fehleranteile eine entsprechende Netzverzerrung von 47.35 in quadratischer Form und für den Verzerrungseffekt aufgrund eines vernachlässigten Zentrierfehlers von ± 2 mm eine ebenfalls quadratische Netzverzerrung von lediglich 2.93, also in erheblich geringerer Größenordnung.

Abb. (A.6.2.2b) Fehlerellipsen Netz *Wattenmeer* mit Wirkung der systematischen Fehleranteile (belastete Situation):



A.6.3 Geometrische und stochastische Wirkung geometrischen Zwangs

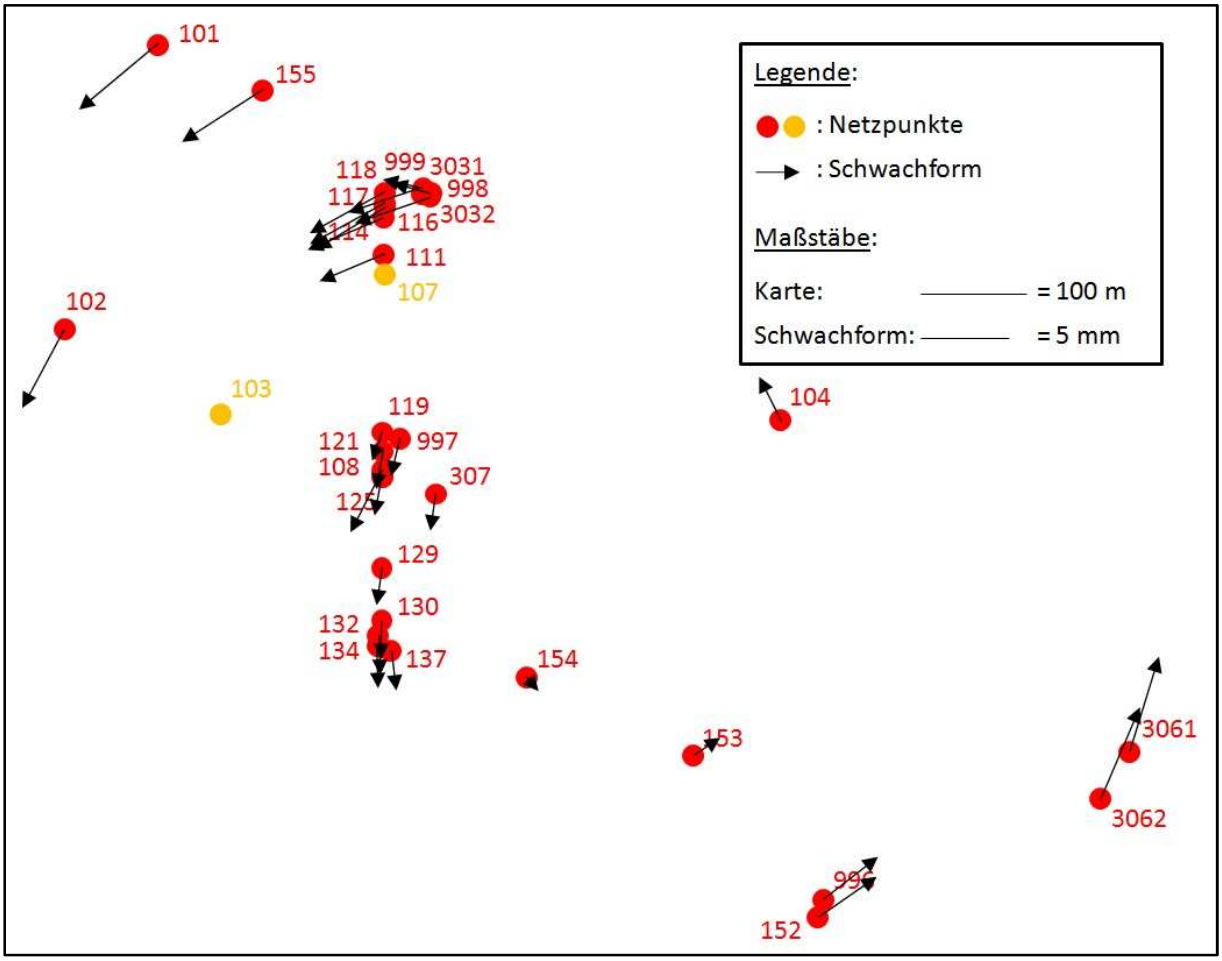
A.6.3.1 Quasi-Knotenpunkte als Anschlusspunkte

Die Wirkungen des als anschlusspunktbezogenen ∇x-Fehler modellierten geometrischen Zwangs auf die Stochastik bzw. die Netzgeometrie der konventionellen Ausgleichung mit Quasi-Knotenpunkten als Anschlusspunkte sind in Tab. (A.6.3.1a) bzw. Abb. (A.6.3.1a) dargestellt.

Tab. (A.6.3.1a) Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 und einer Effektbelastung durch ∇x-Fehler:

Anz. FPs	Diskrete Netzver-zerrung	Referenz Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			Effektbelastung Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\nabla$			Nrn. der FPs
		Min.	Max.	Mittel	Min.	Max.	Mittel	
	$\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{ll})$	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	
2	128.03	1.0	6.9	3.0_4	2.3	8.9	4.7_5	s.o.

Abb. (A.6.3.1a) Latente Hauptschwachform aufgrund ∇x-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107:



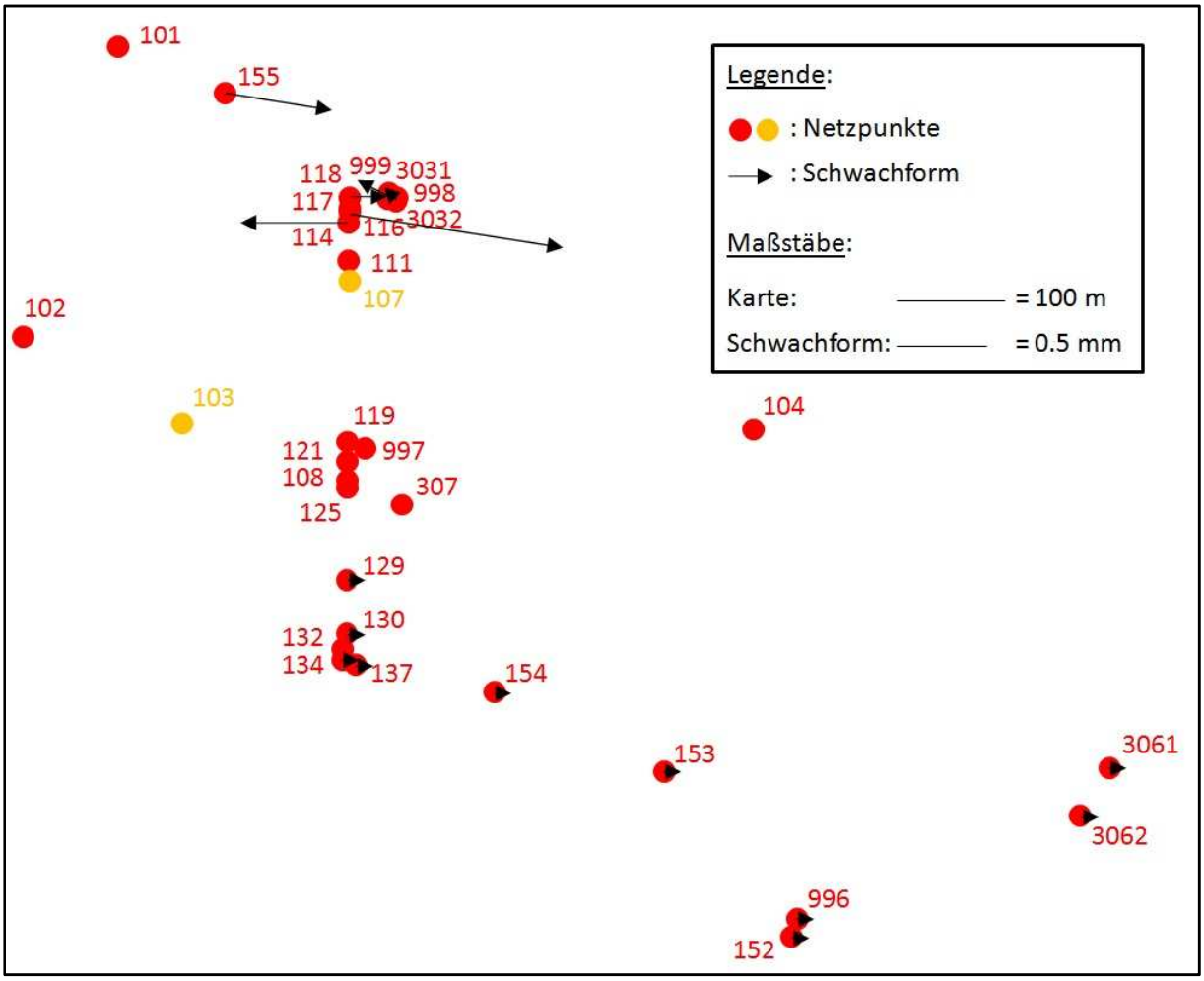
Mit der Modellierung des geometrischen Zwangs anhand eines Vektors mit ∇x-Komponenten stellt der resultierende Kovarianzmatrixzuschlag eine Rang-1-Matrix und somit die latente Hauptschwachform in Abb. (A.6.3.1a) und (A.6.3.2a) bereits das vollständige Fehlerbudget der ∇x-Effektbelastung dar.

Die Darstellung der Wirkung des geometrischen Zwangs auf die Effektbelastung erfolge indirekt als Wirkung der stochastisch-systematischen Fehleranteile δ unter den Bedingungen dieses Zwangs anhand eines Vergleichs zwischen effektbelasteten Situationen ohne und mit geometrischem Zwang.

Tab. (A.6.3.1b) Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 und einer Effektbelastung durch δ-Fehler ohne und mit geometrischem Zwang als unmittelbare Anschlusskoordinatenänderung:

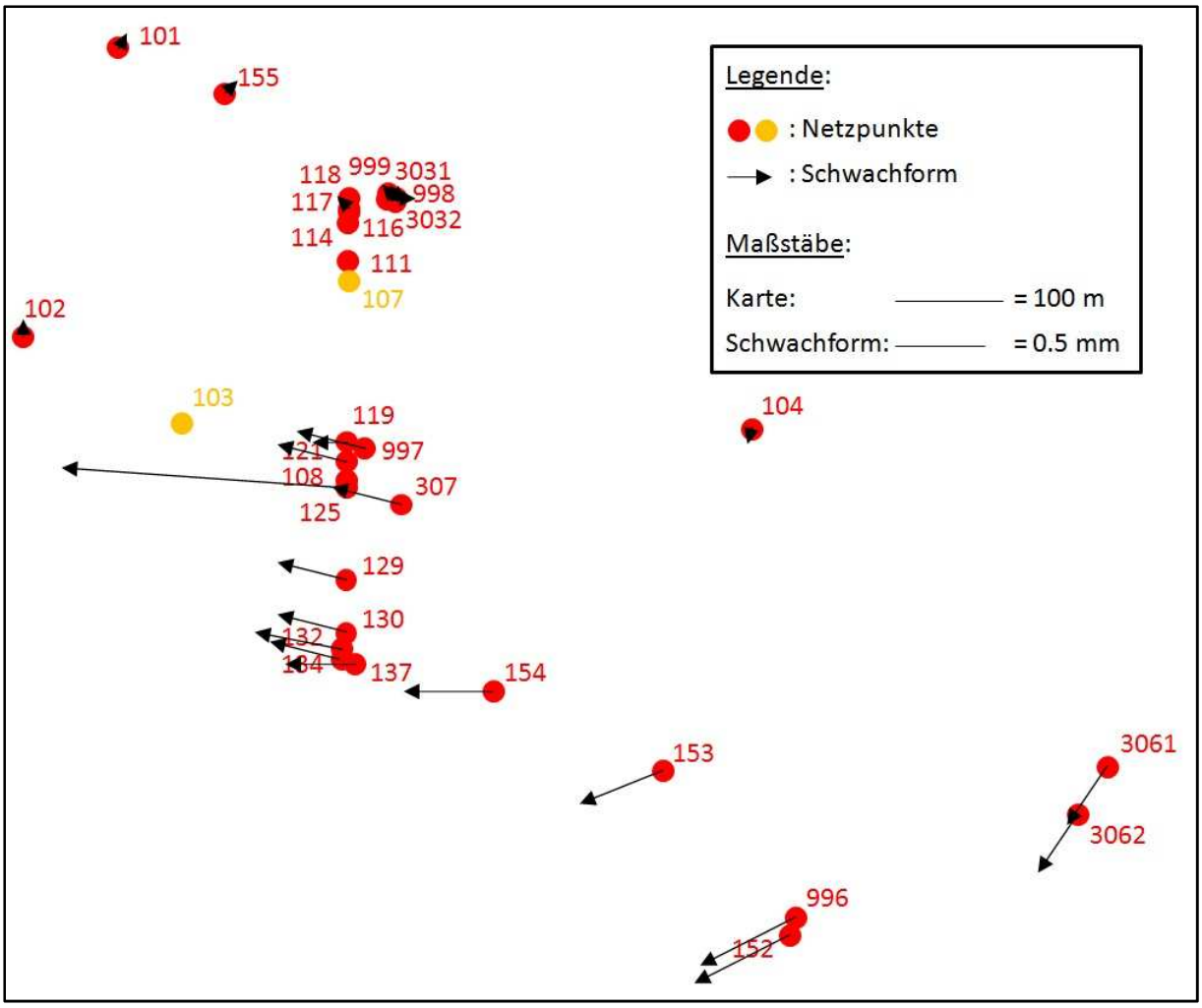
Anz. FPs	Diskrete Netzverzerrung	Referenz Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			Effektbelastung Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			Nrn. der FPs	Geom. Zwang
	$\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{ll})$	Min. [mm]	Max. [mm]	Mittel [mm]	Min. [mm]	Max. [mm]	Mittel [mm]		
2	270.80	1.0	6.9	3.0_4	1.7	6.9	3.5_3	s.o.	ohne
2	329.92	1.2	8.3	3.6_7	1.9	7.8	3.9_9	s.o.	mit

Abb. (A.6.3.1b) Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 ohne geometrischen Zwang:



Die zugehörige geometrische Situation sei anhand der latenten Hauptschwachformen der stochastisch-systematischen Fehleranteile δ für den Fall ohne und mit geometrischem Zwang gezeigt.

Abb. (A.6.3.1c) Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 mit geometrischem Zwang:



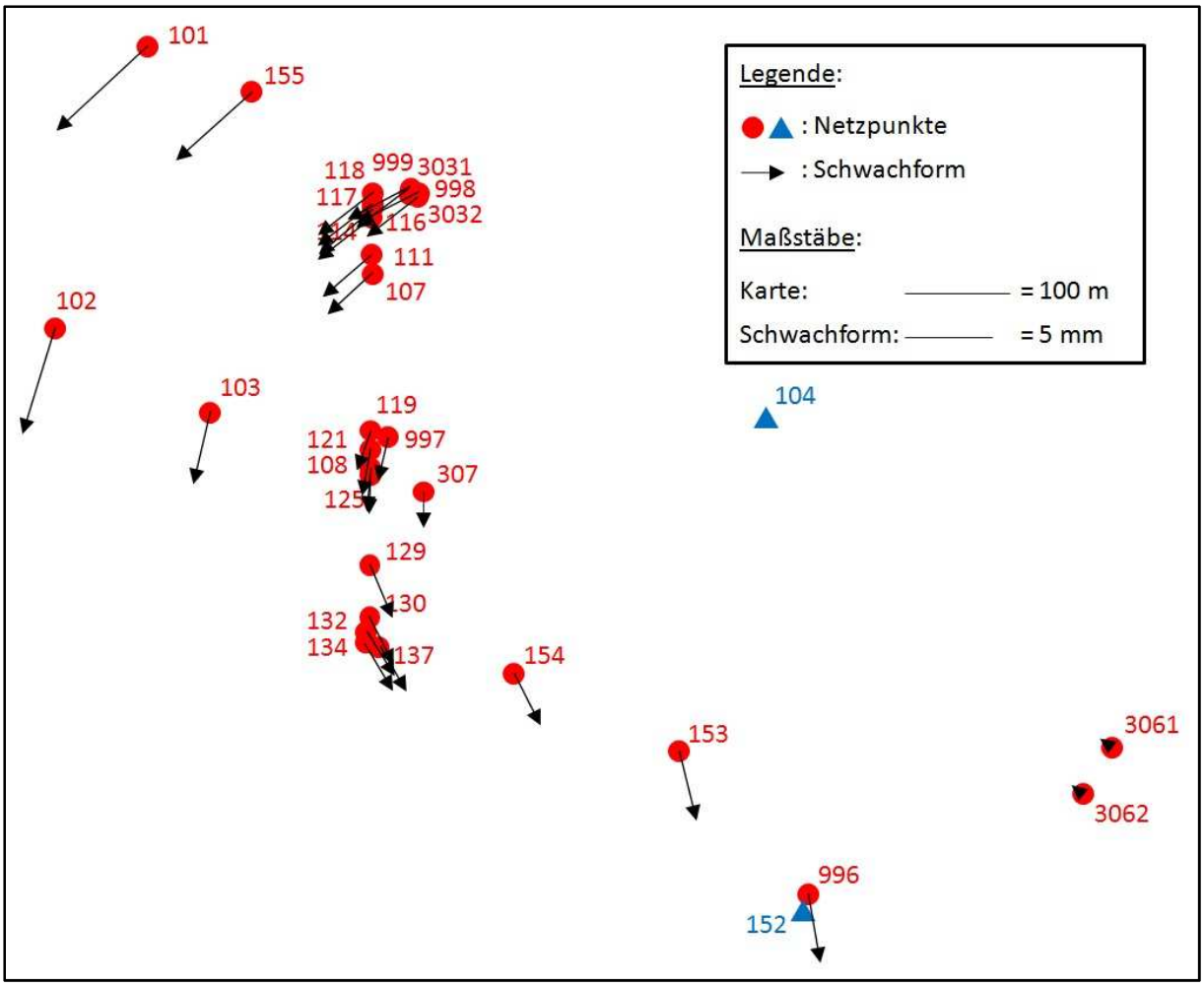
A.6.3.2 Non-Knotenpunkte als Anschlusspunkte

Die Wirkungen des geometrischen Zwangs auf die Stochastik bzw. die Netzgeometrie der konventionellen Ausgleichung mit Non-Knotenpunkten als Anschlusspunkte sind in Tab. (A.6.3.2a) bzw. Abb. (A.6.3.2a) dargestellt.

Tab. (A.6.3.2a) Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 und einer Effektbelastung durch ∇x-Fehler:

Anz. FPs	Diskrete Netzverzerrung $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			Effektbelastung Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\nabla$			Nrn. der FPs
		Min.	Max.	Mittel	Min.	Max.	Mittel	
		[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	
2	78.05	1.4	3.9	2.8_1	2.7	8.2	4.5_9	s.o.

Abb. (A.6.3.2a) Latente Hauptschwachform aufgrund ∇x-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152:



Die Darstellung der Wirkung des geometrischen Zwangs auf die Effektbelastung erfolge indirekt als Wirkung der stochastisch-systematischen Fehleranteile δ unter den Bedingungen dieses Zwangs anhand eines Vergleichs zwischen effektbelasteten Situationen ohne und mit geometrischem Zwang.

Tab. (A.6.3.2b) Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 und einer Effektbelastung durch δ-Fehler ohne und mit geometrischem Zwang als unmittelbare Anschlusskoordinatenänderung:

Anz. FPs	Diskrete Netzverzerrung $\bar{\delta}'^2_{stoch}(\boldsymbol{l}, \Delta\boldsymbol{C}_{ll})$	Referenz Mittl. Lagepunktfehler M_P, ε			Effektbelastung Mittl. Lagepunktfehler $M_P, \varepsilon\delta$			Nrn. der FPs	Geom. Zwang
		Min. [mm]	Max. [mm]	Mittel [mm]	Min. [mm]	Max. [mm]	Mittel [mm]		
2	272.54	1.4	3.9	2.8_1	2.1	4.8	3.5_9	s.o.	ohne
2	271.28	1.4	4.0	2.9_0	2.1	5.0	3.7_0	s.o.	mit

Die zugehörige geometrische Situation sei auch hier anhand der latenten Hauptschwachformen der stochastisch-systematischen Fehleranteile δ für den Fall ohne und mit geometrischem Zwang gezeigt.

Abb. (A.6.3.2b) Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Netz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 ohne geometrischen Zwang:

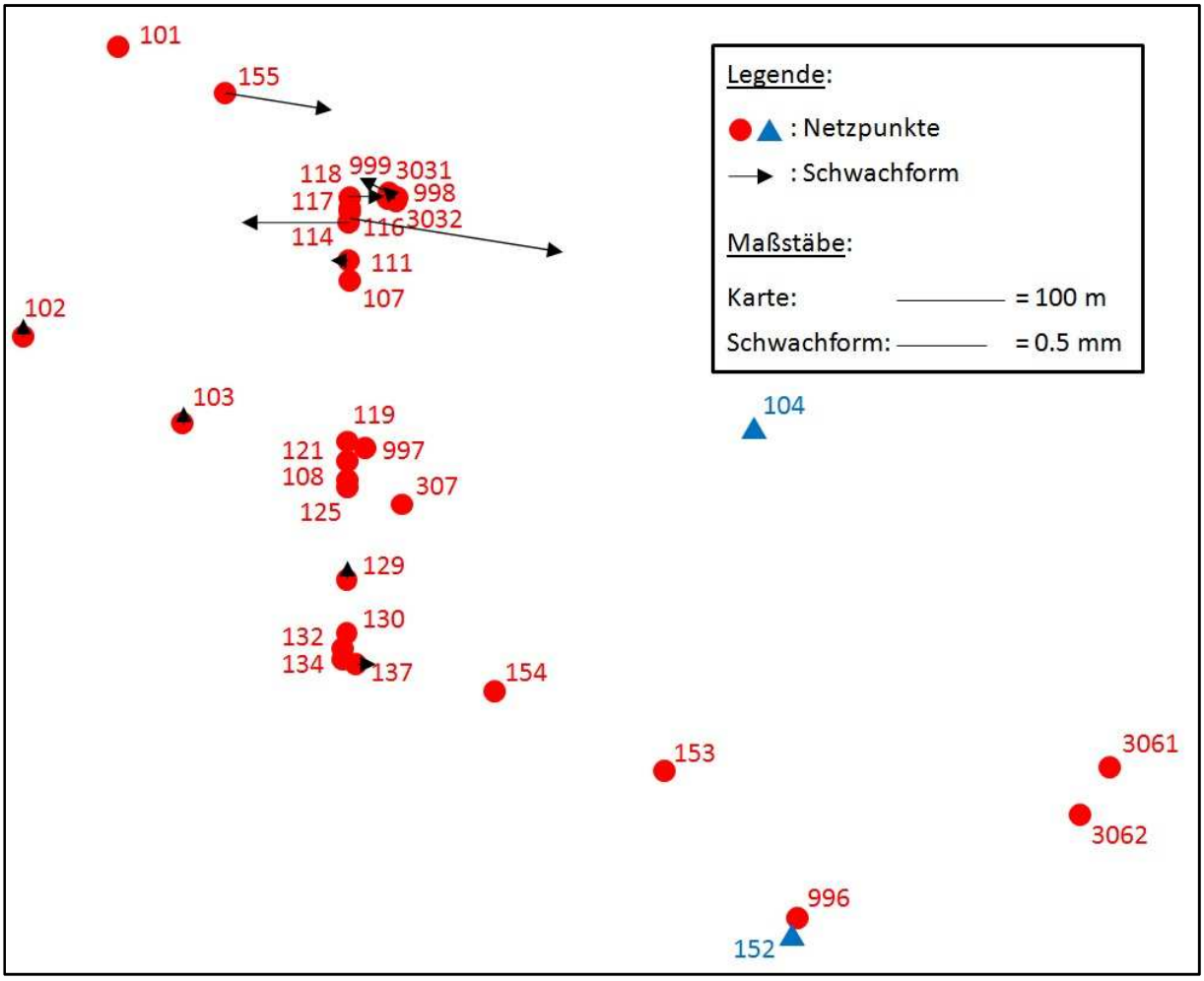
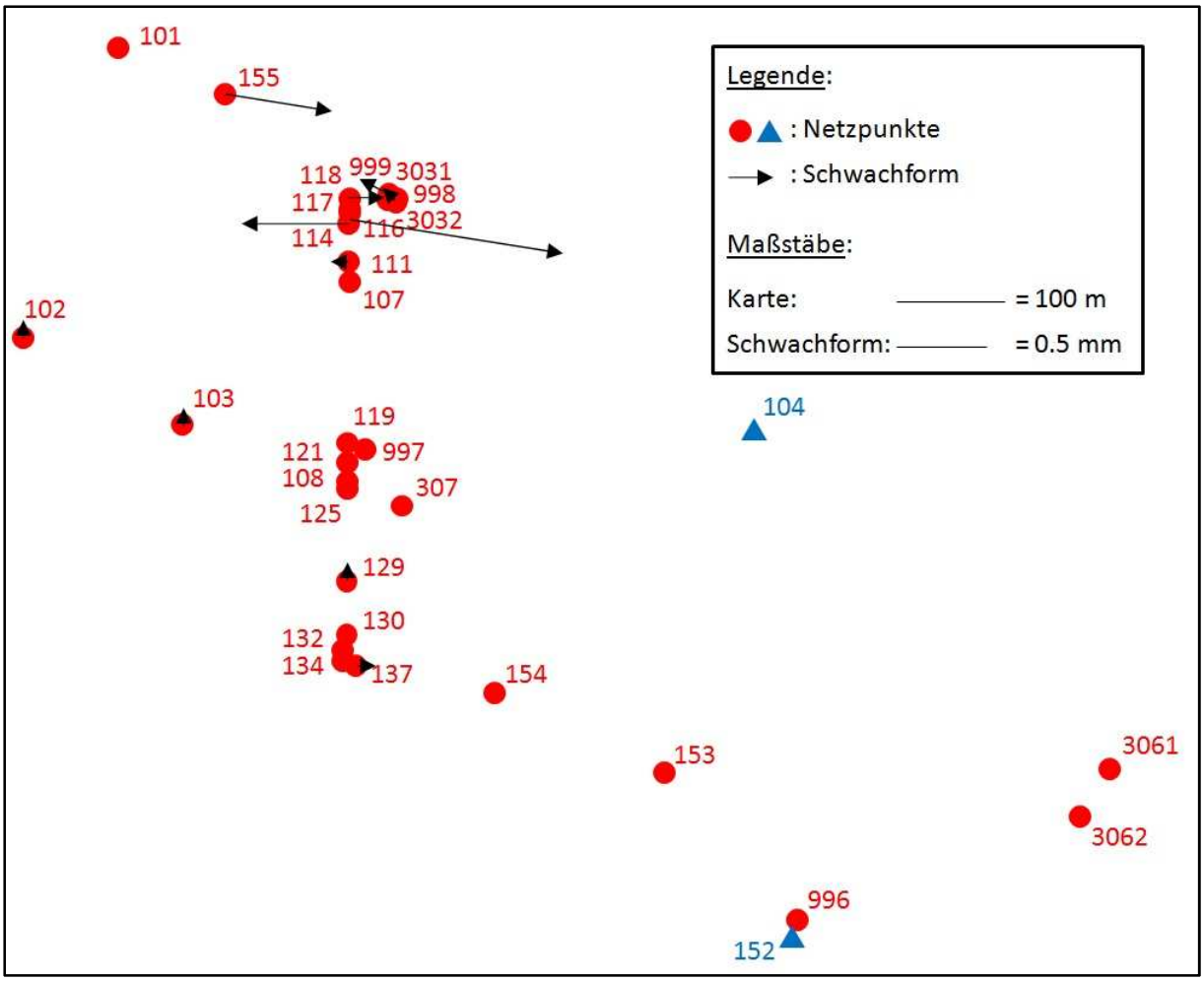


Abb. (A.6.3.2c) Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Netz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 mit geometrischem Zwang:



A.6.4 Verifizierung von Lageknotenpunkten aus geodätischen Schwachformen

A.6.4.1 Verifizierungsmethode

Die Verifizierung von Lageknotenpunkten erfolge auf der Grundlage von Tests über quantitative und qualitative stochastische Merkmale der Neupunkte:

1. Der quantitative Test dominiert den Verifizierungsalgorithmus und impliziert eine umgekehrte Proportionalität zwischen der Wahrscheinlichkeit für die Knotenpunkteigenschaft eines Neupunktes und dem Betrag seiner Einzelschwachform. Insofern erfolgt zunächst die Sortierung der Neupunkte entsprechend des Kriteriums zunehmender Einzelpunktschwachformen.
2. Der qualitative Test kontrolliert die Einzelschwachformen aller Nachbarpunkte eines Knotenpunktprüflings auf eine *einheitliche* Ausrichtungstendenz in entweder Zenit- oder Nadirrichtung, definiert vom Prüfling zum betrachteten Nachbarpunkt, mit der durch den Nachbarpunkt verlaufenden und zum Prüfling tangentialen Geraden als Unterscheidungskriterium für diese Richtung.

Die Grundlage für diese Tests bilden die in geodätischen Realnetzen stets auftretenden physikalisch bedingten Korrelationen zwischen den Netzbeobachtungen, welche als stochastisch-systematische Fehleranteile Einfluss auf die Netzgeometrie ausüben; die Schwachformen der Neupunkte, in denen sich diese Fehleranteile stets abbilden, werden so systematisch geometrisch bestimmt und zwar je nach Ausprägung und Wirkung der Korrelation auf globale Weise oder in verschiedenen, lokal begrenzten Formen, welche mit dem Auftreten von Knotenpunkten einhergehen. Die geographische Verteilung dieser Knotenpunkte – als Sonderfälle innerhalb der Gruppe der Neupunkte mit quasi-nullwertigen Schwachformen – resultiert insbesondere aus dem Netzdesign – mit beispielsweise verketteten polaren Punktbestimmungen für klassische geodätische Lagenetze, welches die Geometrie der (stochastisch-systematisch bedingten) Fehleranteile der Nachbarpunkte eines Knotenpunktes bestimmt.

Mit Berücksichtigung der Entfernungsabhängigkeit systematischer Streckenfehler ergibt sich für diese Fehleranteile eine mit dem Abstand zum zugehörigen Knotenpunkt zunehmende Größe sowie eine auf diesen Knotenpunkt bezogene radiale Tendenz einheitlicher Ausrichtung. Mit Berücksichtigung der Entfernungsabhängigkeit systematischer Richtungsfehler ergibt sich eine Wirkung auf die Größe der Fehleranteile in der gleichen Weise sowie zusätzlich eine tangentiale Ausrichtungskomponente.

Ohne das Auftreten (physikalisch-bedingter) Korrelationen im Beobachtungsraum wäre die Netzstochastik ausschließlich durch zufällige Fehleranteile bestimmt und infolgedessen ein nach Betrag und Richtung diffuses Bild der Einzelpunktschwachformen ohne erkennbare Knotenpunkte zu erwarten. Dieser Fall kann anhand einer Netzplanung (Netz- oder Genauigkeitsvorbetrachtung) unter Vernachlässigung des stochastischen Modells der Beobachtungen hinsichtlich ihrer Korrelationen realisiert werden.

A.6.4.2 Verifizierungsalgorithmus

Der Algorithmus zur Verifizierung von Knotenpunkten in den Schwachformen geodätischer Lagenetze basiert auf dem vorstehenden Modell für die Abbildung stochastisch-systematischer Fehleranteile der Netzbeobachtungen in der Netzgeometrie.

Der quantitative Test liefert eine Neupunktsortierung nach abnehmender Wahrscheinlichkeit ihrer Knotenpunkteigenschaften und daher mit zunehmenden Einzelpunktschwachformen. Daraus ergibt sich der erste Neupunkt als Knotenpunktprüfling größter Wahrscheinlichkeit, dessen Verifizierung nach dem qualitativen Test erfolgen soll. Zu diesem Zweck ist die Gruppe seiner Nachbarpunkte geeignet festzulegen. Infolge der Entfernungsabhängigkeit der Schwachformgrößen seiner Nachbarpunkte zum Prüfling als Zentralpunkt bietet sich ein Suchradius als Nachbarschaftskriterium an, dessen Länge sich sinnvoll als der halbe Abstand zum Knotenpunktprüfling zweitgrößter Wahrscheinlichkeit festlegen lässt, um die Gruppe der Nachbarpunkte des ersten Prüflings auf Neupunkte zu beschränken, deren Schwachformen geometrisch nicht von einem anderen präsumtiven Knotenpunkt dominiert werden. Der erste Prüfling werde nun als Knotenpunkt akzeptiert, falls mindestens zwei Nachbarpunkte für ihn existieren – da der qualitative Test anhand lediglich eines Nachbarpunkts trivial wäre – und diese jenen Test erfüllen; es erfolgt die Verwerfung des Prüflings, falls wenigstens eine dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist.

Die Verifizierung der weiteren Prüflinge erfolgt zwar prinzipiell in gleicher Weise, jedoch ergibt sich der Suchradius ab dem zweiten Prüfling als dessen kleinster halber Abstand zu allen bis dahin verifizierten Knotenpunkten einschließlich des Prüflings mit jeweils nächstkleinerer Wahrscheinlichkeit, um dessen möglicher Knotenpunkteigenschaft bei der Festlegung der Nachbarpunkte Rechnung zu tragen. Sollte sich auf diese Weise zunächst eine Menge mit maximal einem Punkt für die Gruppe der Nachbarpunkte ergeben, wird der kleinste halbe Abstand nur aus den bereits verifizierten Knotenpunkten gesucht, um die Nachbarschaftsbedingung nicht aufgrund eines noch nicht verifizierten Knotenpunktes möglicherweise unzulässig einzuschränken. Der aktuelle Knotenpunktprüfling wird als solcher verworfen, falls sich auch aus dieser modifizierten Festsetzung des Suchradius maximal ein Nachbarpunkt ergeben sollte.

Ein Prüfling wird somit als Knotenpunkt verworfen, falls für ihn nicht mehr als ein Nachbarpunkt gefunden werden kann oder seine Nachbarpunkte den qualitativen Test nicht erfüllen.
Der Algorithmus bricht die Neupunktprüfung auf Knotenpunkteigenschaften ab, sobald ein Prüfling erstmalig verworfen wird, da sich für nachfolgende Prüflinge die Knotenpunktwahrscheinlichkeiten verringern.

A.6.5 Empirische 7-Parameter-Bestimmung nach der differentiellen Methode

A.6.5.1 Problemstellung

In der Vergangenheit bestand im Zusammenhang mit der RTK-PDGPS-Positionierung die Aufgabe einer bestmöglichen dreidimensionalen Überführung der gemessenen RTK-ETRS89-Positionen in die Landes- bzw. Gebrauchskoordinatensysteme. Die Positionierungspraxis erforderte daher Parameter zur Transformation zwischen dem Ausgangsdatum ETRS89 und dem jeweiligen (konventionellen) Gebrauchssystem als Zieldatum zur optimalen Einpassung der beobachteten Positionen in diesen Zielbezug, dessen Heterogenität insbesondere für das horizontale geodätische Datum aufgrund von unterschiedlichen, historisch gewachsenen und zueinander komplementären Teilnetzen der Landesvermessung im Meßgebiet grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden kann (BAUER 2003).

Die Repräsentativität und damit der Anpassungsfehler eines Transformationsparametersatzes hängt daher in hohem Maße von der flächenhaften Ausdehnung des Meßgebietes ab. Dies gilt auch für eine über diese Datumstransformation zu erzielende Adaption der Höhenkoordinate, weil das (Quasi-) Geoid als Höhenbezugsfläche des Landessystems ein unregelmäßig geformter, mathematisch nicht elementar erfassbarer Körper ist und sich daher umso besser über eine (mathematisch regelmäßige) entsprechend zu verschiebende und zu kippende Ellipsoidoberfläche als originärer GNSS-Höhenbezug annähern lässt, je kleinräumiger der betrachtete Bereich ist.

A.6.5.2 Lösungsansatz

Typischerweise vollzieht sich der Übergang ins Landessystem auf diese Weise in zwei Schritten:

1. Datumstransformation der beobachteten RTK-ETRS89-Positionen anhand einer 7-Parameter-Umformung. Eine alternative Überführung der beobachteten ellipsoidischen Höhe in das Zieldatum des Landeshorizonts ist unter Verwendung eines geeigneten Geoidmodells (HEITZ 1969, DENKER & TORGE 1998) möglich.
   Auf diese Weise entstehen (vorläufige) Landeskoordinaten und genäherte NN-Höhen.
2. Lokale Bestanpassung der im ersten Schritt erhaltenen Koordinaten (Ist-System) anhand einer horizontalen und ggf. vertikalen Kalibrierung.
   Die horizontale Kalibrierung entspricht einer 3- oder 4-Parameter-Ähnlichkeitstransformation über identische Lagepunkte (Soll-System: Festpunkte im Gebrauchs- bzw. Landessystem). Die vertikale Kalibrierung entspricht i.A. einem Höhenoffset mit Zweiachskippung (→ schiefe Ebene) der beobachteten und datumstransformierten Positionen über identische Höhenpunkte (Soll-System: NN- bzw. NHN-Höhenfestpunkte).

Auf diese Weise entstehen endgültige Landeskoordinaten mit angeglichenen NN- bzw. NHN-Höhen.

Der zweite Schritt dient somit lediglich der verbesserten Anpassung der gemessenen Koordinaten an das Landessystem bzw. an den NN- / NHN-Horizont. Er stellt folgende Bedingungen:

- Bereitstellung und RTK-Beobachtung klassischer Lagefestpunkte am oder im Meßgebiet.
- Bereitstellung, ggf. nivellitische Herauslegung und RTK-Beobachtung klassischer Höhenfestpunkte ebendort.
- Beachtung einer ausreichenden Horizontfreiheit bei der RTK-Beobachtung der Lage- und Höhenfestpunkte.
- Verwendung frei aufstellbarer Rover für die erforderlichen RTK-Beobachtungen. Nautische Anwendungen scheiden somit aus, da deren fest installierte Rover dafür ungeeignet sind.
- Bereitstellung eines ausreichend genauen Geoidmodells, welches in die jeweilige Software eingebunden werden muss, falls die alternative Überführung der beobachteten ellipsoidischen Höhen erfolgen soll.
- Einsatz einer GNSS-Feldcontroller- bzw. Auswertesoftware, welche diese Kalibrierungen unterstützt.

Der zur Durchführung des zweiten Schrittes erforderliche Aufwand steht so in einem schlechten Verhältnis zum erwarteten Nutzen. Darüber hinaus ist der zweite Schritt bei vielen praktischen Anwendungen (z.B. top. Geländeaufnahmen) entbehrlich, wenn innerhalb des ersten Schrittes ein lokal bestpassender 7-Parametersatz für die Datumstransformation, welcher auch die Höhe adaptiert, verwendet wird.

Das Ziel des zweiten Schrittes ist so bereits innerhalb des ersten Schrittes annähernd erreichbar, falls folgende Voraussetzungen beachtet werden:

- Begrenzung der Größe des Meßgebietes zur Erhaltung der Repräsentativität des 7-Parametersatzes entsprechend der jeweiligen Genauigkeitsvorgaben für Lage und Höhe.
- Anzahl und Verteilung der verwendeten Festpunkte müssen die Erzeugung eines für das Meßgebiet ausreichend repräsentativen und statistisch sicheren 7-Parametersatzes ermöglichen.
- Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit und einer für das jeweilige Meßvorhaben ausreichenden Eignung des erzeugten 7-Parametersatzes müssen die Genauigkeiten seiner Komponenten bzw. der transformierten Positionen ermittelbar sein und ermittelt werden.

A.6.5.3 Algorithmus zur empirischen Parameterbestimmung

Es ergibt sich somit folgender Algorithmus zur Erzeugung und Prüfung eines lokal bestpassenden 7-Parametersatzes für die Datumstransformation von beobachteten RTK-Positionen in den Zielbezug:

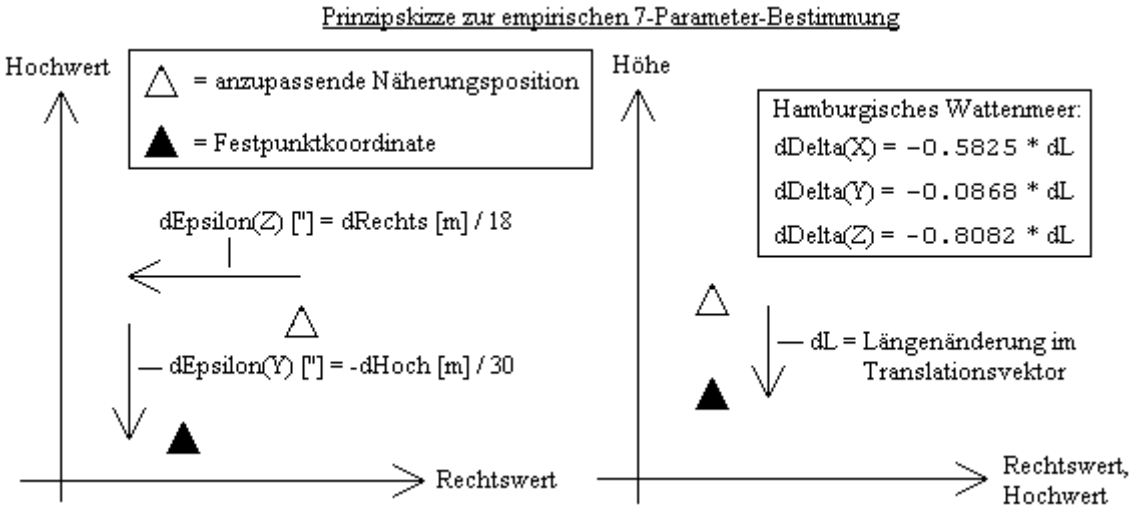
1. Bereitstellung einer ausreichenden Anzahl von Lage- und Höhenfestpunkten im Meß- bzw. Ermittlungsgebiet, welche die erforderliche Horizontfreiheit aufweisen müssen.

2. Beobachtung der RTK-ETRS89-Positionen jener Festpunkte. Zur Steigerung der Zuverlässigkeit und Genauigkeit ist dieser Schritt ggf. mehrfach durchzuführen und die Mittel der beobachteten Positionen für die nachfolgenden Berechnungen einzusetzen.
3. Datumstransformation jener Positionen in den Zielbezug des Gebrauchs- bzw. Landessystems anhand eines dafür näherungsweise kompatiblen 7-Parametersatzes.
4. Direkte Differenzenbildung zwischen den so erhaltenen genähert transformierten Positionen und den gegebenen Festpunkten für jede Koordinatenrichtung entsprechend der Beziehung
$$\Delta(Klaffe) = Genäherte\ Position - Festpunktkoordinate$$
Berechnung des Klaffenmittelwertes für jede Koordinatenrichtung.
5. Durchführung eines Ausreißertests für die Klaffenmittelwerte anhand eines einfachen Data-Snoopings, ggf. Wiederholung der Mittelbildung unter Ausschluss der Ausreißer.
6. Überführung der drei somit erhaltenen Klaffenmittelwerte $(\Delta Re, \Delta Ho, \Delta H\ddot{o})$ in Änderungen d von fünf der sieben Einzelparameter mit Drehwinkel ε_x und Maßstabsfaktor m als Konstante.

Tab. (A.6.5.1) Änderungen d als Korrekturen für fünf der sieben Einzelparameter:

Klaffenmittel	Konvergenzgrenze		Parameteränderung
[mm]	[mm]	[″]	
ΔRe	9	$\cong 0.0005$	$d\varepsilon_z[0.001''] = \frac{\Delta Re[\mathrm{mm}]}{18}$
ΔHo	15	$\cong 0.0005$	$d\varepsilon_y[0.001''] = \frac{-\Delta Ho[\mathrm{mm}]}{30}$
$\Delta H\ddot{o}$	1	-	Hafen HH / Wattenmeer $d\Delta_x[\mathrm{mm}] = -0.5856 * \Delta H\ddot{o}$ / $-0.5825 * \Delta H\ddot{o}$ $d\Delta_y[\mathrm{mm}] = -0.1031 * \Delta H\ddot{o}$ / $-0.0868 * \Delta H\ddot{o}$ $d\Delta_z[\mathrm{mm}] = -0.8040 * \Delta H\ddot{o}$ / $-0.8082 * \Delta H\ddot{o}$

Abb. (A.6.5.1) Prinzipskizze zur empirischen 7-Parameter-Anpassung:



7. Vorzeichengerechte Anbringung der für jeden Einzelparameter ermittelten Änderung d.
8. Wiederholung des Algorithmus ab dem dritten Ablaufpunkt so lange, bis die Änderungen d aller fünf Einzelparameter ihre jeweilige Konvergenzgrenze betraglich unterschreiten. Die Konvergenzgrenzen der Änderungen für die beiden Drehwinkel $(d\varepsilon_y, d\varepsilon_z)$ entsprechen der Rundungsschwelle für die in der Literatur gebräuchliche Auflösung von Winkelangaben in Parametersätzen der Datumstransformationen; die Konvergenzgrenze der Änderungen für die drei Translationsvektorkomponenten $(d\Delta_x, d\Delta_y, d\Delta_z)$ ist der (nivellitischen) Genauigkeit von Höhenfestpunkten angepasst.

Liegt der endgültige 7-Parametersatz für das Ermittlungsgebiet auf diese Weise vor, sollten sich die Festpunktkoordinaten anhand von datumstransformierten RTK-Wiederholungsbeobachtungen im RTK-Genauigkeitsrahmen für Lage und Höhe reproduzieren lassen.

A.6.5.4 Genauigkeitsbetrachtung

Die sich für den endgültigen Parametersatz in jeder Koordinatenrichtung ergebenden Restklaffungen sind grundlegend für Betrachtungen zur Genauigkeit des Verfahrens ausgehend von der vorliegenden Stichprobe und ergeben als Verbesserungen $v = \Delta(Klaffe)$ bei n Einzelpunkten den

$$\text{mittleren Anpassungsfehler der jeweiligen Koordinatenrichtung eines Einzelpunktes} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$$

Die Zusammenfassung von auf den Rechts- und auf den Hochwert bezogener genauigkeitsangebender Größe nach dem Varianzenfortpflanzungsgesetz für unabhängige Ausgangsgrößen ergibt den mittleren Lagefehlervektor; der mittlere Höhenfehlervektor wird als auf die Höhe bezogene Genauigkeitsangabe direkt erhalten.
Über diese genauigkeitsanzeigenden Fehlervektoren lässt sich die Eignung des erhaltenen Parametersatzes für den jeweils vorgegebenen Zweck beurteilen.
Die so ermittelten punktbezogenen Fehleranteile geben die Güte des Parametersatzes für praktische Belange bereits ausreichend an, auch wenn ferner diese Anteile unter Beachtung der geometrischen Verhältnisse in genauigkeitsanzeigende Größen für die fünf geschätzten Transformationsparameter $(d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\Delta_x, d\Delta_y, d\Delta_z)$ skalierbar sind. Aufgrund der mangelnden geometrischen Anschaulichkeit der auf diese fünf Einzelparameter bezogenen Stochastik sei jedoch auf die zugehörige Skalierung verzichtet.

A.6.5.5 Anmerkungen

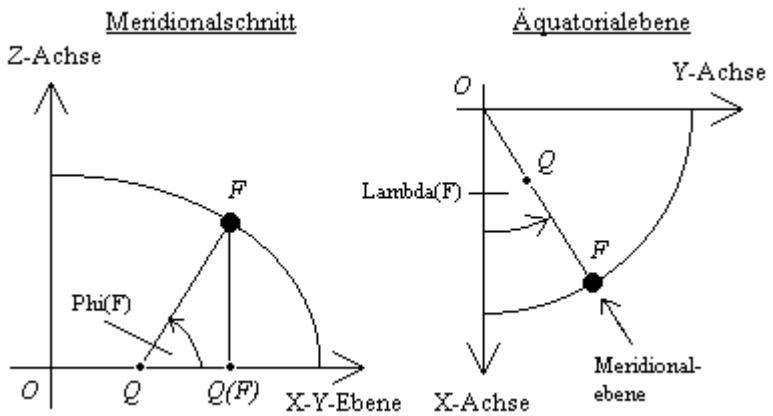
A.6.5.5.1 Allgemeines und Randbedingungen

- Der Schwerpunkt aller in die Anpassung eingeführten Festpunkte stellt als deren einfaches arithmetisches Mittel den (geografischen) Bezugspunkt dieser Anpassung dar.

In der Minimalkonfiguration einer Anpassung mit nur einem Festpunkt bildet jener bereits den Bezugspunkt; in diesem Falle besteht nicht die Möglichkeit einer Genauigkeitsbetrachtung.

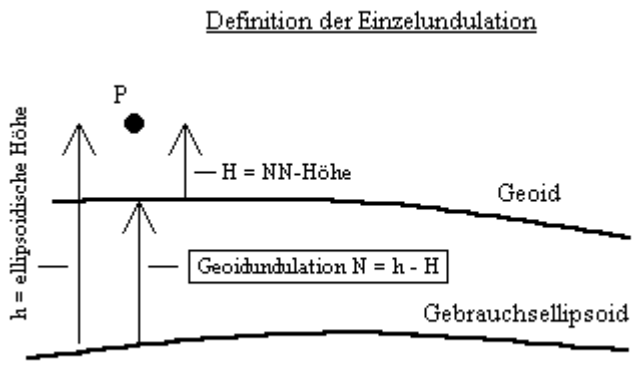
- Der vorgestellte Ansatz gilt in Strenge für die Längengrade 0° und 180° und in guter Näherung noch für deren Nachbarstreifen (z.B. Europa). Für die Meridiane 90° und 270° sind ε_x und ε_y sinngemäß zu tauschen. Im Bereich der Mitten der sich ergebenden vier Zwischenräume (als Quadranten der Äquatorialebene) wurde es bisher nicht getestet.
- Die Anpassung der Höhenkoordinate erfolgt anhand einer Vektoraddition zum Translationsvektor, die entlang der lokalen Ellipsoidnormalen des Potsdamer Datums als das klassische Gebrauchsdatum der Landesvermessung in Deutschland für die beiden Untersuchungsgebiete *Hamburger Hafen* und *Hamburgisches Wattenmeer* orientiert ist, um jene Anpassung von den Lagekoordinaten zu entkoppeln. Auf diese Weise erfolgen die Anpassungen der Lage- (über $\varepsilon_y, \varepsilon_z$) und Höhenkoordinaten (über $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$) getrennt und unabhängig voneinander.

Abb. (A.6.5.2) Geometrische Verhältnisse zur Ellipsoidnormalen:



A.6.5.5.2 Bedeutung der Geoidundulation

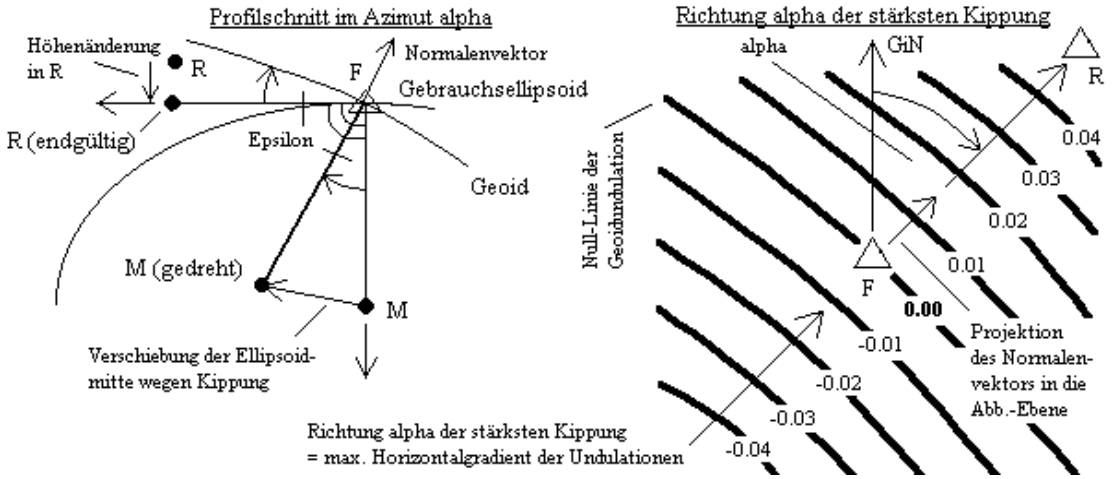
Abb. (A.6.5.3) Definition der Geoidundulation N:



Die Geoidundulation tritt im Rahmen dieses Verfahrens zunächst nicht explizit auf, da sie jeweils im Translationsvektor enthalten ist und somit nicht separat angebracht werden muss. Für nicht in Bezug auf das (Quasi-) Geoid schmiegungsoptimierte Parametersätze gilt jedoch die Einschränkung, dass die

RTK-Höhenbeobachtungen nur am geometrischen Ort der Durchdringungslinie von (Quasi-) Geoid und Gebrauchsellipsoid (mit Lagerung gemäß des verwendeten Parametersatzes) undulationsfrei angepasst werden und außerhalb davon infolge deren Belastung durch einen Verkippungsfehler undulativ korrigiert werden müssen.

Abb. (A.6.5.4) Prinzip der gegen das (Quasi-) Geoid gekippten Ellipsoidoberfläche:



A.6.5.6 Alternativverfahren räumliche Ähnlichkeitstransformation

Alternativ zur Parameteranpassung nach der differentiellen Methode stellt die räumliche Ähnlichkeitstransformation die strenge Lösung dar, indem alle sieben Parameter unter Verwendung von 3D-Festpunkten in einem Zuge ausgeglichen werden. Dieser Ansatz weist jedoch folgende Nachteile auf:

- Mindestens zwei Festpunkte müssen nach Lage und Höhe bestimmt werden, darüber hinaus ist ein weiterer Festpunkt für die Lage oder die Höhe erforderlich. Die empirische Parameteranpassung kommt hingegen in der Minimalkonfiguration mit nur einem 3D-Festpunkt aus.
- Aufgrund der mathematisch komplexen Zusammenhänge zwischen den gesuchten Parametern und den formal als Beobachtungen einzuführenden Festpunktkoordinaten ist der zugehörige Ausgleichungsansatz nicht wie für die meisten geodätischen Ortungsaufgaben üblich gemäß des Gauß-Markov-Modells (GMM) sondern entsprechend des Gauß-Helmert-Modells (GHM) aufzustellen und dabei die beobachteten Festpunktkoordinaten formal als zusätzliche Schätzgrößen einzuführen (Jäger et al. 2005). Die strenge Umsetzung des sich hieraus ergebenden GHM stellt hohe Anforderungen an resultierende Softwarelösungen. In jedem Falle sind die klassisch getrennt ermittelten Lage- und Höhenkoordinaten der Festpunkte vorbereitend in kartesische Koordinaten eines ECEF-Systems zu wandeln.
- Anwendungen der Softwarelösungen
  - Trimble Geomatics Office (TGO), Version 1.63, Build 10 (26.08.2005)
  - Leica SKI-Pro, Version 2.5 (2004)
  - Cremer Auswertung und Planerstellung (CAPLAN), Version 2.2 (25.05.2007)

lieferten unterschiedliche Ergebnisse für die Schätzung der sieben Parameter aus derselben Stichprobe gegebener Festpunktkoordinaten und bei einheitlicher Fixierung auf jeweils eine der beiden Transformationsmethoden nach Molodensky-Badekas (BADEKAS 1969) oder Bursa-Wolf (BURSA 1962).

Im Gegensatz dazu ist das empirische Verfahren stets eindeutig und resistent gegenüber jenen Effekten.

- Aufgrund der zu lösenden Ausgleichungsaufgabe müssen die Softwarelösungen iterative Verfahren anwenden. Es zeigte sich für die Mehrheit der getesteten Anwendungen nach beiden Transformationsmethoden eine fehlende Konvergenz in der Schätzung der Transformationsparameter.
- Die Ergebnisse einer Parameterschätzung ließen sich für dieselbe Softwarelösung und dieselbe Transformationsmethode unter Weglassung oder Hinzufügung einzelner Festpunkte stets nicht reproduzieren, auch wenn zueinander konsistente Festpunkte vorlagen, deren Koordinaten in beiden Systemen sich anhand einer Datumstransformation mit einheitlichem 7-Parametersatz, welcher folglich das Ergebnis der Parameterschätzung darstellen sollte, aufeinander abbilden lassen.

Als mögliche Ursache für die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Softwarelösungen, für die mehrheitlich fehlende Konvergenz der iterativen Parameterschätzung sowie deren mangelnde Reproduzierbarkeit im Falle einer Anzahländerung der zueinander konsistenten Festpunkte kommen die ungünstigen geometrischen Verhältnisse bei der Bestimmung der Drehwinkel für den Übergang zwischen zwei dreidimensionalen kartesischen Bezugssystemen in Frage, da hierfür Festpunkte als Passpunkte verwendet werden, deren für die Untersuchungsgebiete üblichen Abstände auf der Erdoberfläche als (genäherte) Ellipsoidoberfläche mit maximal etwa 30 km weniger als 0.5 % des Erdradius als Schenkellänge der abzuleitenden Drehwinkel betragen. Die Bestimmung der räumlich und weltweit wirkenden Drehwinkel erfolgt daher aus einem Stützpunktfeld heraus, das sich auf einen Sektor von weniger als 0.0002 % der Erdoberfläche beschränkt anstatt sich idealerweise gleichmäßig über den gesamten Wirkungsbereich der Transformation – also weltweit – zu verteilen und somit zu einer instabilen Numerik führt.

Das empirische Verfahren zur Parameteranpassung bzw. -bestimmung stellt daher auf jeden Fall eine praktikable Alternative zum strengen Ansatz über eine räumliche Ähnlichkeitstransformation dar.

A.6.6 Prüfung der RTK-DGPS-Methode hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit als Meßverfahren zur Sicherungsmessung des Neuwerker Ringdeichs

A.6.6.1 Problemstellung

Der Neuwerker Ringdeich übt als Landeshauptdeich die wesentliche Hochwasserschutzfunktion für die Hamburg-Insel Neuwerk aus, weist eine Länge von 4.2 km und eine durchschnittliche Höhe von etwa 6 m NN auf und ist in den 1990er Jahren mehrfach baulich leicht verändert worden, wodurch auch seine Höhenentwicklung beeinflusst war, die aufgrund seines Status als Seedeich bis 1995 jährlichen Kontrollmessungen im Bereich der Deichkrone und des Deichvorlands zu unterziehen war.

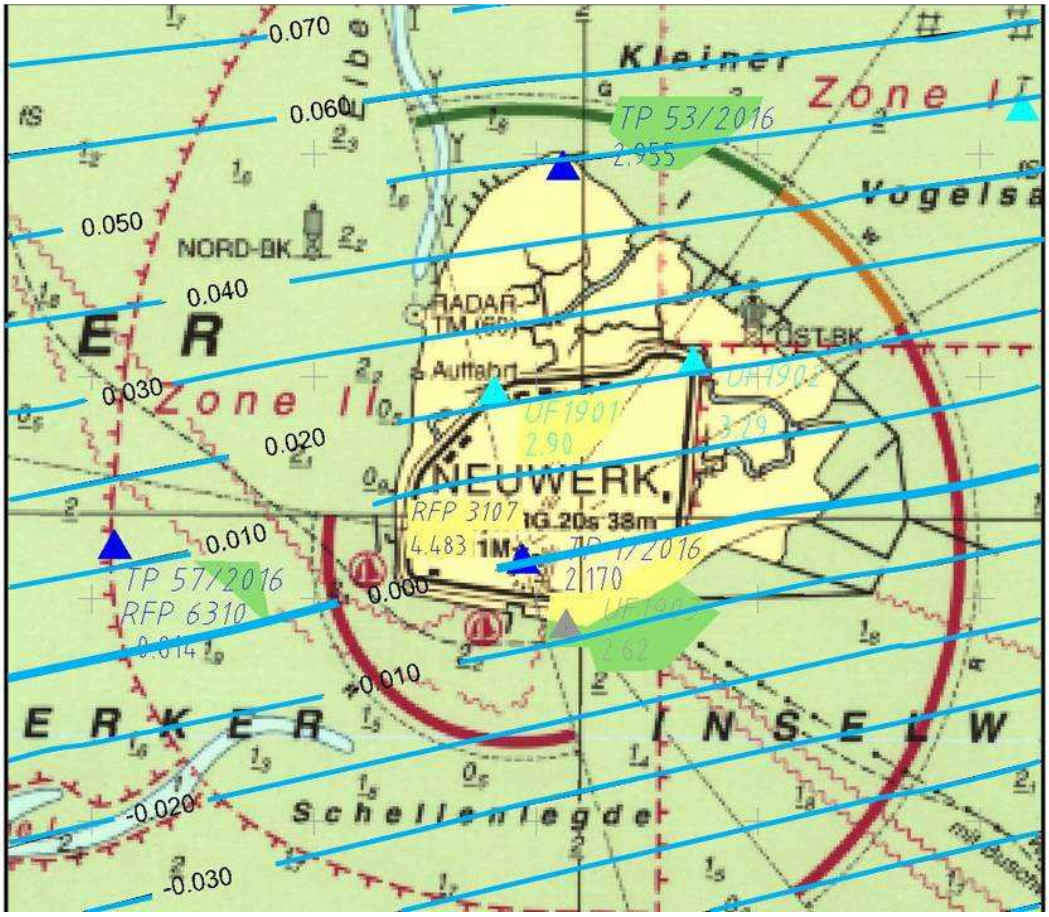
Diese Höhenkontrollmessungen fanden stets im Spätsommer und als Ringnivellement unter Zwangsanschluss an den datumsgebenden Präzisionshöhenfestpunkt RFP 3107 statt und wurden entsprechend mit Abschlussfehlerverteilung im Absolutmodell ausgewertet. Die zugehörigen Objektpunkte sind in insgesamt 79 quer zur örtlichen Deichachse orientierten Profilen mit einem Profilabstand von 50 m und zu je vier Punkten pro Profil angeordnet. Dabei ist lediglich der jeweils zur Deichachse und zum Deichvorland gehörige Objektpunkt – üblicherweise anhand eines Hartholzpflockes – vermarkt; die übrigen beiden Profilpunkte bilden die land- bzw. wasserseitige Böschungsoberkante der Deichkrone und wurden bis 1995 anhand der Örtlichkeit festgelegt. Zur Profilanordnung s. Abbildung (A.6.6.3).

Ende der 1990er Jahre erhob sich jedoch anlässlich der Einführung von satellitengestützten Ortungsmethoden innerhalb des Vermessungsdienstes des für die Durchführung dieser Kontrollbeobachtungen zuständigen Amtes für Strom- und Hafenbau der Freien und Hansestadt Hamburg sowie aufgrund von Überlegungen zur Wirtschaftlichkeit des nivellitischen Beobachtungsverfahrens die Frage zur alternativen Anwendung GNSS-gestützter Verfahren für die zyklische Höhenkontrolle des Neuwerker Ringdeichs, welche aufgrund des Alters und des Status jenes Hochwasserschutzbauwerks ab dem Jahr 2000 nur noch alle drei Jahre durchzuführen ist. Aufgrund der dafür geforderten Höhengenauigkeit im Sub-Dezimeter-Bereich kam entsprechend des technischen Standes der im Jahre 2000 verfügbaren GNSS-Korrekturdatendienste lediglich der Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung (SAPOS) im hochpräzisen Echtzeit-Positionierungs-Service (HEPS-Modus) und mit Nutzung von Flächenkorrekturparametern (FKP) in Frage.

A.6.6.2 Lösungsansatz

Zur Umformung der beobachteten ETRS-89-Positionen in das Landessystem nach Lage und Höhe wurde ein 7-Parametersatz verwendet, welcher zum horizontalen und vertikalen geodätischen Datum Neuwerks näherungsweise kompatibel ist und eine zum (Quasi-) Geoid nach DENKER (1998) leicht gekippte ellipsoidische Höhenbezugsfläche erzeugt.

Abb. (A.6.6.1) Undulation des (Quasi-) Geoid nach DENKER (1998) zur Ellipsoidoberfläche:



= Isolinie der Undulation (Äquidistanz: 1 cm)

Für die RTK-Beobachtungen wurden folgende Randbedingungen spezifiziert:

- Interne Genauigkeitsschranken : ± 10 mm (horizontal), ± 15 mm (vertikal)
- Mindestbeobachtungszeit : 5 s
- Mindestanzahl Einzelpositionen pro Objektpunkt : 3

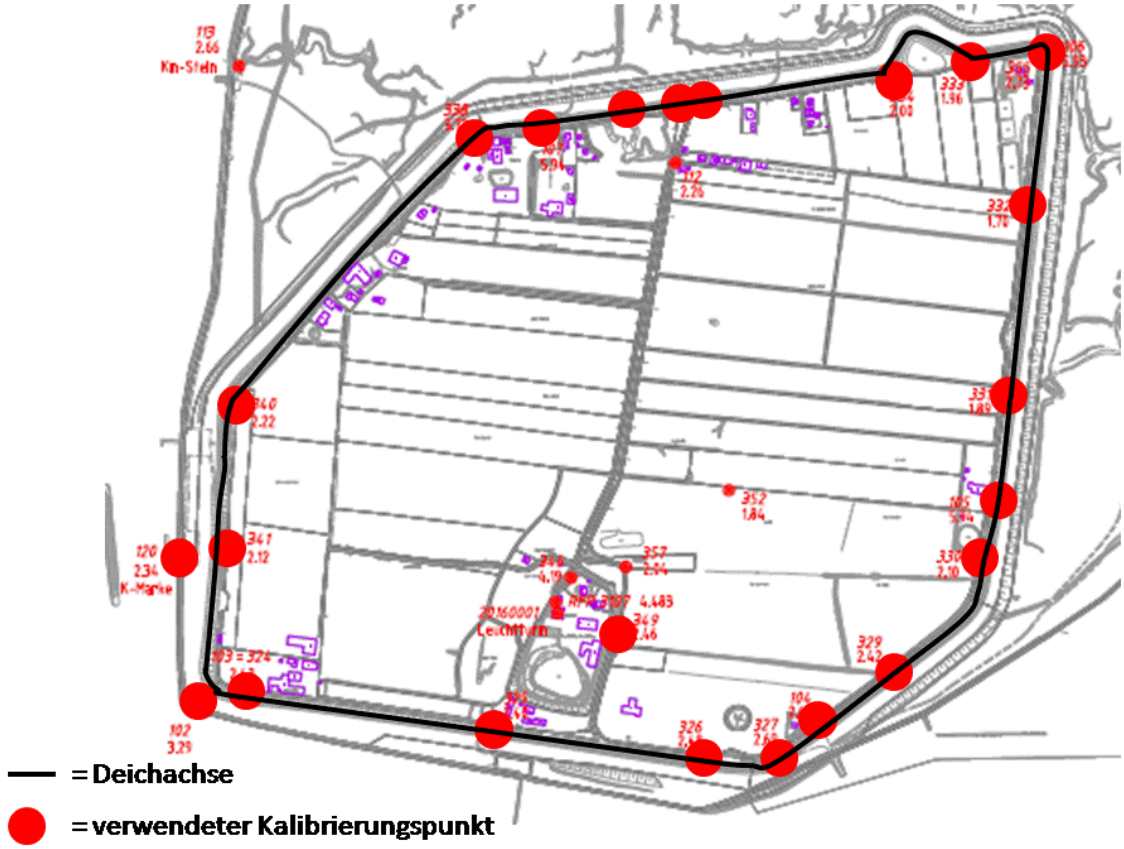
Aus den Erfahrungen anderer RTK-Massenpunktbestimmungen mit ähnlichen äußeren Bedingungen, wie z.B. Sicherungsmessung der Hamburger Köhlbrandbrücke in BRUNKHORST & NODOP (1999), ist unter Anwendung des SAPOS-HEPS-Modus mit Flächenkorrekturparametern eine zu erwartende RTK-Vertikalmessgenauigkeit von etwa ± 24 mm (1σ) für den gemessenen Einzelpunkt nachweisbar.

Eine Betrachtung der Genauigkeit dieses noch vertikal zu kalibrierenden RTK-Punktfeldes sollte als Vergleich mit den letzten nivellitischen Einzelpunkthöhen von 1995 Aufschluss über die Eignung der RTK-Methode für die Belange der Kontroll- bzw. Sicherungsmessung geben. Da aber die Soll-Höhen der beteiligten Kalibrierungspunkte im Landessystem (Normalnull) originär bis dahin nicht nivellitisch erzeugt worden waren sondern selber nur aus RTK-Anwendungen resultierten, ist das Ergebnis einer vertikalen Kalibrierung mit Anschluss an diese Punkte hinsichtlich der zu erreichenden Genauigkeit

nur suboptimal und soll in dieser Form somit keine weitere Verwendung finden. Da ferner die im Jahr 2000 erhobenen RTK-Beobachtungen der Höhenkontrollmessung wegen Kompatibilitätsproblemen mit Versionen der zugehörigen Auswertesoftware ab der Mitte des Jahrzehnts für eine Nachbildung ihrer Vertikalkalibrierung im Anschluss an die Erzeugung nivellitischer Höhen für die beteiligten Kalibrierungspunkte in den Jahren 2004 bis 2005 nur noch bedingt reorganisierbar waren, mussten für die aufzustellende Genauigkeitsuntersuchung des kalibrierten RTK-Punktfeldes RTK-Beobachtungen von Höhenkontrollmessungen aus den Messepochen nach 2005 verwendet werden. Auf diese Weise wird die erste darauffolgende Messepoche aus dem Jahr 2006 hierfür betrachtungsgegenständlich.

Zur horizontalen und vertikalen Besteinpassung dieses RTK-Punktfeldes in die Landesbezüge DHDN bzw. Normalnull erfolgte im Rahmen der Kontrollmessung aus 2006 zusätzlich die Beobachtung von 23 am und im Meßgebiet gelegenen Kalibrierungspunkten nivellitischer Höhengenauigkeit zu jeweils mindestens 30 s Dauer bei sonst gleichen Optionen.

Abb. (A.6.6.2) Verteilung der Kalibrierungspunkte für die horizontale und vertikale Besteinpassung:



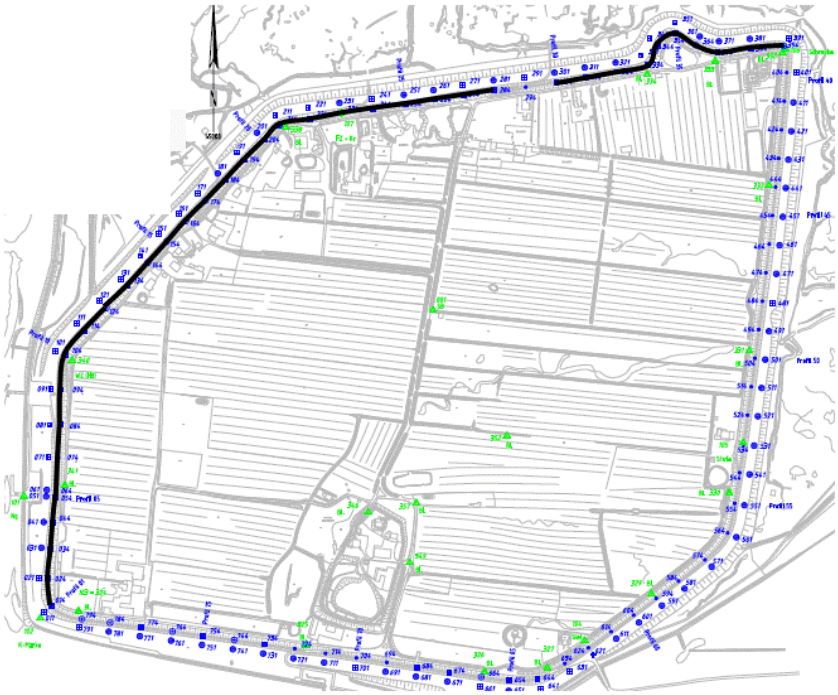
Infolge der geringen erzielten Abschlussfehler der beobachteten Nivellementschleifen zur präzisen Neubestimmung der Kalibrierungspunkthöhen sind deren Genauigkeiten im Millimeterbereich zu erwarten, so dass die Vertikalkalibrierung das Ergebnis der Höhenkontrollmessung nicht spürbar zusätzlich stochastisch belasten wird.

A.6.6.3 Ergebnisse

Die vertikale Kalibrierung des RTK-Punktfeldes über das Verfahren einer ausgleichenden schrägen Ebene weist eine maximale Restklaffung von 60 mm auf und ist daher in diesem Zusammenhang als ausreißerfrei zu betrachten; die mittlere vertikale Restklaffung beträgt ± 29 mm und entspricht damit der Größenordnung von ± 24 mm für die einfache RTK-Vertikalmessgenauigkeit zuzüglich etwaiger geringer stochastischer Effekte infolge der Genauigkeiten der Kalibrierungspunkthöhen.

Aufgrund der eindeutigen Ausgestaltung der Objektpunktvermarkungen in der Deichachse sollen nur Objektpunkte jener Gruppe an der Genauigkeitsbetrachtung zur Prüfung der Eignung des angewandten GNSS-Verfahrens für die Belange der Höhenkontrollmessung des Neuwerker Ringdeichs teilnehmen. Infolge der während des Vergleichszeitraumes von 1995 bis 2006 stattgefundenen baulichen Veränderungen des Ringdeichs kommen aus dieser Gruppe jedoch nur die veränderungsfreien Deichmitten der Profile mit den laufenden Nummern 1 bis 39 (ohne 29) in Betracht.

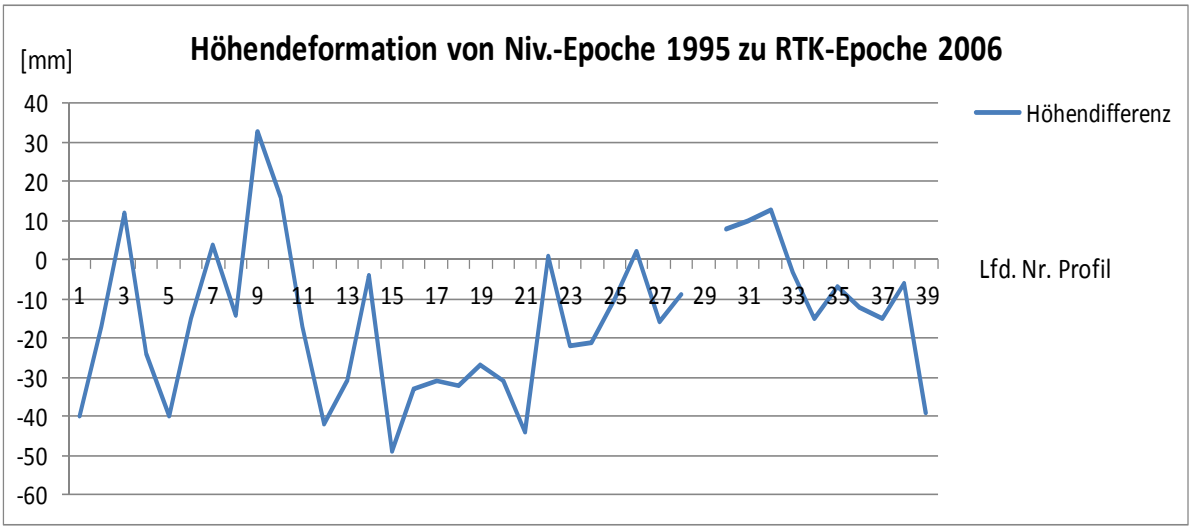
Abb. (A.6.6.3) Für die Genauigkeitsbetrachtung verwendete Deichmitten der Höhenkontrollmessung:



= Genauigkeitsbetrachtete Deichmitten

Somit ergeben sich Höhendeformationen an 38 von 79 möglichen Deichmitten für den Übergang von der letzten nivellitisch beobachteten Epoche von 1995 auf die dritte RTK-beobachtete Epoche aus dem Jahre 2006.

Abb. (A.6.6.4) Höhendeformationen von 38 Deichmitten zwischen der nivellitischen Epoche 1995 und der RTK-beobachteten Epoche 2006:



Es ergibt sich eine durchschnittliche Setzung von 15 mm sowie eine Standardabweichung für den Einzelpunkt von ± 19 mm aus der betrachteten Punktgruppe. Es ist jedoch davon auszugehen, dass die auf jene Weise implizit eingeführte Modellannahme eines für die gesamte Punktgruppe einheitlichen Setzungsverhaltens nicht den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen dürfte und somit die Stochastik noch mit den Fehlern dieser Modellannahme belastet ist, welche sich darauf verzerrend im Sinne einer Vergrößerung auswirken. Die zugehörige Beweisführung gelingt empirisch anhand der Einteilung des Ringdeiches in Gruppen von Punkten erkennbar gleichen Setzungsverhaltens. So weisen die Punkte 22 bis 38 eine durchschnittliche Setzung von 6 mm und die übrigen Punkte eine ebensolche von 21 mm auf; die Standardabweichung für den Einzelpunkt verringert sich einhergehend – wenn auch nur wenig ausgeprägt – auf ± 18 mm. Mit Einführung einer dritten Gruppe weisen die zugehörigen Punkte 15 bis 21 eine durchschnittliche Setzung von 35 mm, die Punkte 22 bis 38 unverändert 6 mm und die übrigen Punkte 15 mm auf; diese weitere Differenzierung der Modellannahme auf nunmehr drei verschiedene Deichbereiche unterschiedlichen Setzungsverhaltens setzt die Standardabweichung des Einzelpunkts weiter auf ± 16 mm herab. Dieses Beispiel zeigt empirisch, dass sich eine falsche oder nicht exakte Modellbildung – hier im Kontext mit einer vertikalen Deformationsanalyse – vergrößernd auf die aus der gegebenen Stichprobe und modellbedingt geschätzte Stochastik der Beobachtungen auswirkt.

Die angegebene vertikale Einzelpunktstochastik umfasst also neben der Vertikalgenauigkeit der RTK-Epoche 2006, welche empirisch zu ± 24 mm angenommen wurde, noch die stochastische Wirkung von möglichen Fehlern oder Unschärfen der Modellannahme eines einheitlichen Setzungsverhaltens sowie die nivellitische Einzelpunktgenauigkeit der Epoche 1995 unbekannter Größenordnung. Da jedoch das hier für den Einzelpunkt nachgewiesene Gesamtfehlerbudget von ± 19 mm seine empirische, auf die RTK-Beobachtung bezogene Einzelkomponente bereits unterschreitet, muss diese Unterschreitung

auch für die sich aus dieser Stichprobe tatsächlich ergebende RTK-Vertikalmessgenauigkeit gelten, welche somit zu besser als ± 19 mm nachgewiesen werden kann.

A.6.6.4 Bewertung und Fazit

Die Kontrollmessung des Neuwerker Ringdeichs wurde im Jahre 2000 erstmalig als RTK-Verfahren durchgeführt und liefert so im Vergleich zu den bis dahin ausschließlich angewendeten nivellitischen Methoden zusätzlich Lageaussagen für die beobachteten Objektpunkte, deren Genauigkeit im SAPOS-HEPS-Modus mit Flächenkorrekturparametern nach BRUNKHORST & NODOP (1999) und BAUER (2003) für die einfache Punktbeobachtung angegeben werden kann zu durchschnittlich ± 17 mm und damit ausreicht für die Belange dieser Bauwerksüberwachungsmessung.
Unter denselben technischen Bedingungen ist eine für die Vorgaben der Bauwerksüberwachung ebenfalls ausreichende einfache RTK-Vertikalmessgenauigkeit von ≈ ± 2 cm im Zielhorizont erreichbar, insofern die beobachteten RTK-Höhen einer Anpassung an ein für das Meßgebiet verfügbares Kalibrierungspunktfeld im Genauigkeitsbereich weniger Millimeter (*vertikale Kalibrierung*) unterzogen werden.
Die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der so erhaltenen Objektpunktpositionen wird durch die in der Praxis vorgenommenen Doppelbeobachtungen der fest vermarkten Punkte noch gesteigert. Die daraus resultierenden Positionsmittelwerte beruhen auf zeitlich und in Bezug auf das verwendete Equipment unabhängige Einzelbeobachtungen.

Die Anwendung des RTK-Verfahrens ist zur Erzeugung von Höhenaussagen für das hier überwachte Bauwerk darüber hinaus wirtschaftlicher als die herkömmliche nivellitische Methode, auch wenn die RTK-gestützte Bauwerksüberwachungsmessung in der hier durchgeführten Form den parallelen Einsatz von zwei Vermessungstrupps oder die Doppelbeobachtung der fest vermarkten Objektpunkte anhand eines Trupps in zwei aufeinanderfolgenden Sequenzen erfordert, weil der Zeitaufwand für die nivellitische Methode jeweils ein Vielfaches davon beträgt.

Für die Belange und Vorgaben dieser Bauwerksüberwachung reicht es aus, alternativ zur vertikalen Kalibrierung der beobachteten RTK-Höhen diese anhand eines geeigneten (Quasi-) Geoidmodells in den Zielhorizont (Normalnull) zu überführen, auch wenn deren Vertikalgenauigkeit auf diese Weise anhand der Genauigkeit jenes Modells von ca. ± 1 cm (DENKER 1998) zusätzlich belastet wird. Nach dem Varianzenfortpflanzungsgesetz für unabhängige Ausgangsgrößen beschränkt sich jedoch dieser Effekt für eine einfache originäre RTK-Vertikalgenauigkeit von ± 2 cm auf rund 12 % und ist für eine resultierende vertikale Objektpunktgenauigkeit von ca. ± 22 mm mithin unkritisch.
Die Verwendung entsprechender geeigneter Modelle ist hier also genauigkeitsaspektlich konform und steigert die Wirtschaftlichkeit des RTK-Verfahrens, weil dafür keine vertikalen Kalibrierungspunkte mehr geschaffen, bereitgestellt und beobachtet werden müssen.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Lagenetz *Neue Bahnbrücke Kattwyk* (Netzbild der konventionellen Ausgleichung mit den Helmertschen Fehlerellipsen)	10
3.1	Nivellementnetz *Testschleife Koblenz* mit topografischem Geländeprofil, wahren Fehlern, zufälligen Fehleranteilen (ε) und stochastisch-systematischen Fehleranteilen (δ) gemäß Netzplanung	44
3.2	Netzbild der freien Ausgleichung des Nivellementnetzes *Freinetz Francop-Waltershof*	45
5.1	Beziehung zwischen Beobachtungsraum und Parameterraum	52
5.2	Linearisierungsbedingter geometr. Verzerrungseffekt der Varianzanteile 2. Ordnung	53
5.3	Beobachtungs- und parameterbezogene Residuen 2. Ordnung für linearisierte Schätzer	54
5.4	Entwicklung des mittleren Punktfehlers 2. Ordnung $M_P(2)$ (einseitig angeschlossener Polygonzug)	85
5.5	Entwicklung des mittleren Punktfehlers 1. Ordnung $M_P(1)$ (einseitig angeschlossener Polygonzug)	85
5.6	Stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung bzw. latente Hauptschwachform (einseitig angeschlossener Polygonzug)	86
6.1	Langwellige Schwachform im DB-Netz *Pulverdingen* bis 0.3 m aus Jäger (1988)	95
6.2a	Netzbild zur Erzeugung der Verknüpfungspunkte via hierarchischer Ausgleichung	111
6.2b	Netzbild zur Erzeugung der Neupunkte via hierarchischer Ausgleichung	112
6.2c	Netzbild zur Erzeugung der Neupunkte via dynamischer Ausgleichung	113
6.3a	*Freinetz Rethebrücke* in seiner hier betrachteten, gegenüber dem ursprünglichen Design reduzierten Form mit den Fehlerellipsen der konventionellen freien Ausgleichung	115
6.3b	Effektbelastete Fehlerellipsen und latente Hauptschwachform aufgrund der Vernachlässigungen im stochastischen Modell der Beobachtungen im *Freinetz Rethebrücke*	116
A.5.10.1	Prinzipskizze und Indexierung zum einseitig angeschlossenen Polygonzug	221
A.6.1.1	Langwellige Schwachform im Landesnetz *Rheingrenze* bis 1.0 m nach eigenen Berechnungen	228
A.6.1.2	Langwellige Schwachform im DHDN bis 2.5 m aus Derenbach et al. (2006)	229
A.6.1.3	Langwellige Schwachform im Landesnetz *Nowosibirsk* bis 4.5 m aus Jäger et al. (2012)	230
A.6.2.1	Ergebnis der Bestandsprüfung des Festpunktfeldes *Hamburgisches Wattenmeer*	232
A.6.2.2a	Netzbild *Wattenmeer* m. Fehlerellipsen ohne Wirkung der systematischen Fehleranteile (unbelastete Situation)	238
A.6.2.2b	Fehlerellipsen Netz *Wattenmeer* mit Wirkung der systematischen Fehleranteile (belastete Situation)	239
A.6.3.1a	Latente Hauptschwachform aufgrund ∇x-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107	240

A.6.3.1b Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 ohne geometrischen Zwang 242
A.6.3.1c Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 mit geometrischem Zwang 243
A.6.3.2a Latente Hauptschwachform aufgrund ∇x-Fehler im hierarchischen Lagenetz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 244
A.6.3.2b Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Netz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 ohne geometrischen Zwang 245
A.6.3.2c Latente Hauptschwachform aufgrund δ-Fehler im hierarchischen Netz *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 mit geometrischem Zwang 246
A.6.5.1 Prinzipskizze zur empirischen 7-Parameter-Anpassung 251
A.6.5.2 Geometrische Verhältnisse zur Ellipsoidnormalen 253
A.6.5.3 Definition der Geoidundulation N 253
A.6.5.4 Prinzip der gegen das (Quasi-) Geoid gekippten Ellipsoidoberfläche 254
A.6.6.1 Undulation des (Quasi-) Geoid nach Denker (1998) zur Ellipsoidoberfläche 257
A.6.6.2 Verteilung der Kalibrierungspunkte für die horizontale und vertikale Besteinpassung 258
A.6.6.3 Für die Genauigkeitsbetrachtung verwendete Deichmitten der Höhenkontrollmessung 259
A.6.6.4 Höhendeformationen von 38 Deichmitten zwischen der nivellitischen Epoche 1995 und der RTK-beobachteten Epoche 2006 260

Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht der effektbelastenden Induktionswirkungen in geodätischen Netzen	36
3.2	Quantifizierungsergebnisse der effektbelastenden Induktionswirkungen zweier Nivellementnetze	44
5.1	Übersicht der systematischen u. stochastischen Wirkung der Nichtlinearitätsverzerrung	51
5.2	Übersicht der Kapitel zur Entwicklung der geometrischen $(\boldsymbol{b_x})$ und stochastischen $(\boldsymbol{C})$ Verzerrungseffekte 2. Ordnung	55
5.3	Übersicht der hier gefundenen geometrischen (b_x) u. stochastischen $(\boldsymbol{C})$ Verzerrungseffekte 2. Ordnung	66
5.4	Übersicht zur Quellenlage bezüglich des geometrischen und des stochastischen Verzerrungseffekts 2. Ordnung	67
5.5	Effekte 2. Ordnung der vektorwertigen Zufallsvariablen $\boldsymbol{l}$ auf die Momente 1. und 2. Ordnung der Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$ für den nicht überbestimmten Fall	72
5.6	Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 1. Ordnung der vektorwertigen Zufallsvariablen $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{x}$ für den nicht überbestimmten Fall	80
5.7	Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einseitig angeschlossenen Polygonzug	84
6.1	Strukturelle Übersicht der nicht-zufälligen Fehleranteile in Lagenetzen	108
6.2a	Freie bzw. zunehmend redundante hierarchische Realnetzausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten und einer Effektbelastung durch δ-Fehler	118
6.2b	Freie bzw. zunehmend redundante hierarchische Realnetzausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten und einer Effektbelastung durch δ-Fehler	119
6.3a	Ausgleichung des *Freinetzes Rethebrücke* mit auf die À-posteriori- abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz	123
6.3b	Ausgleichung des Lagenetzes *Schlickdeponie Hamburg-Francop* mit auf die À-posteriori- abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz	123
6.3c	Ausgleichung des Lagenetzes *Stupferich* mit auf die À-posteriori- abgestimmten À-priori-Beobachtungsgenauigkeiten und δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose und als Realnetz	124
6.4a	Freie Ausgleichung des *Rheingrenzennetzes* mit δ-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose	125
6.4b	Freie Ausgleichung des *Rheingrenzennetzes* mit δ- und ∇-Fehler-Effektbelastung als Netzprognose	126
6.5	Ergebnisübersicht und Vergleich der betrachteten Beispielnetze	128

6.6	Verfahren und Testgrößen zur gemeinschaftlichen Prüfung der deterministisch- (∇) und stochastisch- (δ) systematischen Fehleranteile	134
A.5.4.1	Elemente der rechten oberen Hälfte der ersten n,n-Submatrix aus mittlerem Term von (5.22) und aus $2 * \boldsymbol{C_{ll}} \otimes \boldsymbol{C_{ll}}$	173
A.5.6.1	Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 2. Ordnung der skalarwertigen Zufallsvariablen l und x mit beliebiger Dichtefunktion für den nicht überbestimmten Fall	193
A.5.6.2	Systematische und stochastische Identitäten der Anteile 3. Ordnung der skalarwertigen Zufallsvariablen l und x mit beliebiger Dichtefunktion für den nicht überbestimmten Fall	194
A.5.10.1	Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.005 gon)	219
A.5.10.2	Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.05 gon)	219
A.5.10.3	Standardabweichungen 1. und 2. Ordnung und stochastisch induzierter Parameterbias 2. Ordnung im einfachen polaren Anhängen (globale À-priori-Richtungsgenauigkeit von ± 0.5 gon)	220
A.5.10.4	Nomenklatur der beobachtungsbezogenen Indexierung im einseitig angeschlossenen Polygonzug	221
A.6.3.1a	Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 und einer Effektbelastung durch ∇x-Fehler	240
A.6.3.1b	Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Quasi-Knotenpunkten 103 und 107 und einer Effektbelastung durch δ-Fehler ohne und mit geometrischem Zwang als unmittelbare Anschlusskoordinatenänderung	241
A.6.3.2a	Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 und einer Effektbelastung durch ∇x-Fehler	243
A.6.3.2b	Hierarchische Realnetzausgleichung des Lagenetzes *Rethebrücke* mit Non-Knotenpunkten 104 und 152 und einer Effektbelastung durch δ-Fehler ohne und mit geometrischem Zwang als unmittelbare Anschlusskoordinatenänderung	244
A.6.5.1	Änderungen d als Korrekturen für fünf der sieben Einzelparameter	251

Literaturverzeichnis

Baarda, W. (1968): *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. In: Publications on Geodesy, New Series (2), 1. Netherlands Geodetic Commission (5). Delft.

Baarda, W. (1973): *S-Transformation and Criterion Matrices*. In: Publications on Geodesy, New Series (5), 1. Netherlands Geodetic Commission (5). Delft.

Badekas, J. (1969): *Investigations related to the establishment of a world geodetic system*. Report No. 124, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio.

Bauer, M. (2003): *Vermessung und Ortung mit Satelliten*. 5. Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

Bill, R., Jäger, R., Schmitt, G. (1984): *Effekte in langgestreckten Netzen und ihre statischen Analogien*. Zeitschrift für Vermessungswesen, ISSN: 0044-3689, Jg.: 109, Nr. 10, 1984. S. 526 - 540. Karlsruhe.

Bill, R., Jäger, R. (1986): *Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmaße in Verdichtungsnetzen*. DVW-Mitteilungen Baden-Württemberg, Sonderheft „Beurteilung geodätischer Netze“, 70-91.

Böker, F. (2005): *Multivariate Verfahren - Formelsammlung*. Universität Göttingen, Professuren für Statistik und Ökonometrie. http://www.statoek.wiso.uni- goettingen.de/veranstaltungen /Multivariate/Daten/mvformel.pdf (Aufruf: 10.06.2013).

Borre, K. (1987): *Untersuchung geodätischer Netze mittels partieller Differentialoperatoren*. Mitteilungen der Geodätischen Institute der TU Graz, Folge 56.

Bröcker, T. (2004): *Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker*. Zweite, korrigierte Auflage. S. 121 - 122. Birkhäuser Verlag, Basel, Schweiz. ISBN 3-7643-7144-7.

Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. (1983): *Taschenbuch der Mathematik*. 21. Auflage. Verlage B.G. Teubner, Leipzig und Nauka, Moskau.

Brunkhorst, M., Nodop, A. (1999): *Überwachungsmessung der Hamburger Köhlbrandbrücke*. Vortrag an der Bayerischen Akademieder Wissenschaften (3. SAPOS-Symposium 2000), München.

Brunkhorst, M. (2010): *GNSS-based geodetic datum aspects in near-shore areas*. Vortrag auf der Trimble Dimensions (5. Trimble Dimensions 10.11.2010), Las Vegas, Nevada, USA.

Brunkhorst, M. (2012a)*: Zufällige und systematische Fehler im Nivellement - Analysekonzept der natürlichen und latenten Schwachformen*, in der Version *Analyse der zufälligen und systematischen Fehleranteile im geometrischen Nivellement*, Wissenschaftliche Arbeit, HafenCity Universität Hamburg, Juli 2012.

Brunkhorst, M. (2012b): *Building Europe’s mightiest bascule bridge - The Trimble-S6 in geodetic network*. Vortrag auf der Trimble Dimensions (6. Trimble Dimensions 06.11.2012), Las Vegas, Nevada, USA.

Bursa, M. (1962): *The theory for a determination of the non-paralellism of the minor axis of the reference ellipsoid and the inertial polar axis of the earth, and the planes of the initial astronomic*

and the geodetic meridians from observations of artificial earth satellites. Studia Geophysica et Geodetica No. 6, S. 209 - 214.

Casott, N. (1999): *Erfassung des Einflusses der „turbulenten Refraktion“ auf optische Richtungsmessungen mit CCD-Sensoren*. Inaugural-Dissertation. Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Nr. 86. ISSN 0723-4325.

Dankert, J., Dankert H. (2011): *Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. 6., überarbeitete Auflage. S. 686. Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden, 2011. ISBN 978-3-8348-1375-6.

Denker, H., Torge, W. (1998): *The European Gravimetric Quasigeoid EGG97 - An IAG supported continental enterprise*. In: Forsberg, R., Feissel, M., Dietrich, R.: Geodesy on the Move - Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica. IAG Symp., Vol. 119, 1998, Verlag Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Derenbach, H., Illner, M., Schmitt, G., Vetter, M., Vielsack, S. (2006*): Ausgleichungsrechnung – Theorie und aktuelle Anwendungen aus der Vermessungspraxis*. Beiträge zum Fortbildungsseminar vom 5.10.2006 in Karlsruhe, S. 10. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2007,4, Universitätsverlag Karlsruhe, Universität Karlsruhe, 2007.

Dietrich, G., Kalle, K., Krauss, W., Siedler, G. (1992): *Allgemeine Meereskunde*. 3. Auflage. Gebr. Borntraeger Verlag, Berlin, Stuttgart.

Drixler, E. (1993): *Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum*. Dissertation. Deutsche Geodätische Kommission, München.

Fawaz, E. (1981): *Beurteilung von Nivellementnetzen auf der Grundlage der Theorie der stochastischen Prozesse*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, 99.

Finsterwalder, S. (1903): *Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik*. Sitzungsberichte der Münchner Akademie d. Wissenschaften, S. 683, 1903.

Förstner, W. (1979): *Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagenetze in der Landesvermessung*. In: NÖV Nordrhein-Westfalen, S. 125 - 165.

Gantmacher, F.R., Krein, M.G. (1960): *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme*. Akademie Verlag Berlin.

Grabe, M. (2000): *Gedanken zur Revision der Gauß’schen Fehlerrechnung*. In: tm – Technisches Messen. Plattform für Methoden, Systeme und Anwendungen der Messtechnik. Puente Leon, F., Zagar, B. (Hrsg.), Jahrgang 2000, Heft 6. Verlag De Gruyter Oldenbourg, München.

Grafarend, E. & Schaffrin, B. (1993): *Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen*. 1. Auflage. BI-Wiss.-Verlag, Leipzig.

Großmann, W., Kahmen, H. (1988): *Vermessungskunde I*. 17. Auflage. Sammlung Göschen Nr. 2160. Verlag Walter de Gruyter, Berlin.

Haftmann, R. (2009): *Differenzialrechnung - Vom Ein- zum Mehrdimensionalen*. 1. Auflage. Leipzig. In: EAGLE-GUIDE / Mathematik im Studium, Bernd Luderer (Hrsg.), Chemnitz.

Hahn, M., Jäger, R. (1987): *Zuverlässigkeitsbeschreibung bei der Partitionierung von Netzen*. In: Mensuration-Photogrammetrie-Genierural, 85, 102-105, Zürich.

Hartung, J. (2005): *Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. 14. Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München. ISBN 3-486-57890-1.

Heck, B. (1991): *Referenzsysteme*. DVW-Landesverein Baden-Württemberg e.V.: Sonderheft: GPS und Integration von GPS in bestehende Netze, S. 90 - 124.

Heitz, H. (1969): *On the astrogeodetic determination of the geoid by least squares estimation*. In.: Journal of Geodesy 1971, Vol. 45, Nr. 2, S. 221 - 224, Verlag Springer, Berlin, Heidelberg.

Henze, N. (2011): *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden. ISBN 978-3-8348-1845-4.

Hussy, W., Tobinski, D. (2008): *Quantitative Methoden, Interferenzstatistik - Korrelation*. In: Business Value Launch 2006,UDE.EDUcation College im Rahmen des dokFORUMs der Universität Duisburg-Essen. http://www.uni-due.de/imperia/md/content/dokforum/skript_teil__3 (Aufruf: 29.06.2013).

Jäger, R. (1988): *Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien*. Dissertation. DGK, Reihe C, 342. München.

Jäger, R. (1989): *Optimum positions for GPS-points and supporting fix-points in geodetic networks*. In: Müller, I. (Hrsg.) International Association of Geodesy Symposia. Symposium No. 102: Global Positioning System: An overview. Edindurgh/Scotland, 7.-8.8.1989. Convened and edited by Y. Bock and N. Leppard, Springer Verlag: S. 254 - 261.

Jäger, R., Drixler, E. (1989): *Netzoptimierung im Design 0. und 1. Ordnung: Optimale Positionen für eine vorzugebende Zahl einzuschaltender Stützpunkte*, AVN (96), No. 7.

Jäger, R. (1990): *Spectral analysis of relative and supported geodetic levelling networks due to random and systematic errors*. Invited paper to the 1. international workshop on Precise Vertical Positioning. October 08-12.1990, Universität Hannover. ISSN: 0007-4632, Jg. 1990, Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BF02520654.

Jäger, R., Leinen, S. (1992): *Spectral analysis of GPS-Networks and –processing strategies due to random and systematic errors*. In: "Sixth international geodetic symposium on satellite positioning“ (Volume II). The Ohio State University, Columbus, Ohio 43210 (USA).

Jäger, R. (2003): *Konzepte und Realisierungen von Datenbanken zur hochgenauen Transformation zwischen klassischen Landessystemen und ITRF/ETRS89 im aktuellen GIS/GNSS Anwenderprofil*. 3-DIM Seminar, 16.10.2003,Karlsruhe.

Jäger, R., Müller, T., Saler, H., Schwäble, R. (2005): *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren*. 1. Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

Jäger, R. (2010): *Geodätische Infrastrukturen für GNSS-Dienste (GIPS)*. In: "Vernetzt und ausgeglichen“: Festschrift zur Verabschiedung von Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. e.h. G. Schmitt (Band 2010, 3). Zippelt, Karl (Ed.), Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Karlsruher Institut für Technologie. ISBN 978-3-86644-576-5. Seite 151-169.

Jäger, R., Kälber, S., Elena, L., Gorokhova, T. (2012*): Determination of transformation parameters between international and state coordinate systems on the territory of the Novosibirsk region*. Paper presented by T. Gorokhova at the Interexpo Geosiberia 2012, Novosibirsk, Russia, 17.04.2012 - 19.04.2012.

Kahmen, H. (1986): *Vermessungskunde II*. 14. Auflage. Verlag Walter de Gruyter, Berlin.

Kahmen, H. (2006): *Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde*. 20. Auflage. Verlag Walter de Gruyter, Berlin.

Klein, U. (1994): *Analyse und Vergleich unterschiedlicher Modelle der dreidimensionalen Geodäsie*. DGK, Reihe C-479, München.

Koch, K.-R. (1997): *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. 3. bearbeitete Auflage. Dümmler-Verlag, Bonn.

Kreyszig, E. (1998): *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. Fünfter, unveränderter Nachdruck der 7. Auflage. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1998.

Kruck, E., (1995): *Balanced Least Squares Adjustment for Relative Orientation*. Optical 3-D Measurement Techniques III, Wien, 1995.

Kuntz, E., Schmitt, G. (1985): *Präzisionshöhenmessung durch Beobachtung gleichzeitig-gegenseitiger Zenitdistanzen*. AVN 92 (11, 12).

Meissl, P. (1969): *Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens*. In: Rinner, K., Killian, K., Meissl, P.: Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Nr. 61, München, 1969.

Mekid, S., Vaja, D. (2007*): Propagation of uncertainty: Expressions of second and third order uncertainty with third and fourth moments*. The University of Manchester, Mechanical, Aerospace and Civil Engineering School, Manchester, UK. In: Science Direct, Measurement 41 (2008), 600-609.

Mierlo, J. van (1982): *Difficulties in defining the qualities of geodetic networks*. Schriftenreihe für Vermessungswesen HSBw, Nr. 7, München, S. 259 - 274.

Navratil, G. (2006): *Powerpoint-Skript zu Ausgleichungsrechnung II*. Institute for Geoinformation. Technical University Vienna, Wien, 2006.

Niedersächsisches Ministerium des Innern (1988): *Einrichtung, Nachweis und Erhaltung der Festpunktfelder (Niedersächsischer Festpunktfelderlass)*. Erlass vom 25.02.1988.

Niemeier, W. (1982): *Principal component analysis and geodetic networks. Some basic considerations*. In: Borre/Welsch (Hrsg.): Deformationsanalysen 83. Schriftenreihe.

Niemeier, W., Ziegert, M. (1983): *Zur Aufstellung und Anwendung von Kriteriummatrizen bei der optimalen Anlage von Überwachungsnetzen in der Ingenieurvermessung*. In: Welsch, W. (Hrsg.) (1983): Deformationsanalysen ‚83 – Geometrische Analysen und Interpretationen von Deformationen geodätischer Netze. Beiträge zum geodätischen Seminar 22. April 1983. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, S. 229 - 251. ISSN 0173-1009.

Niemeier, W. (2008): *Ausgleichungsrechnung*. 2. Auflage, S. 285. Verlag Walter de Gruyter, Berlin. ISBN 978-3-11-019055-7.

Pantle, U. (2004): *Vorlesungsskript Statistik I*. Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften - Abteilung Stochastik. http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss04/statistik1/skript/node7 (Aufruf: 27.06.2013).

Pelzer, H. (1984): *Systematic Instrumental Errors in Precise Levelling*. In: Pelzer und Niemeier (Hrsg.), Precise Levelling. Dümmler Verlag, Bonn 1984, S. 3 - 17.

Phani, A.S., Adhikari S. (2008): *Rayleigh Quotient and Dissipative Systems*. Applied Mechanics Division of ASME. In: Journal of Applied Mechanics, November 2008, Vol. 75 / 061005-1.

Richter, D. (1986): *Allgemeine Geologie*. 17. Auflage. Sammlung Göschen Nr. 2604. Verlag Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Schenk, W., Kremer, F., Beddies, G., Franke, Th., Galvosas, P., Rieger, P. (2014): *Physikalisches Praktikum*. 14. überarb. und erw. Auflage. Schenk, W., Kremer, F. (Hrsg.), Springer Verlag GmbH, Heidelberg. ISBN 978-3-658-00665-5.

Schmitt, G., Moldoveanu, T., Nica, V. and Jäger, R. (1989): *Deformation analysis of a local terrestrial network in Romania with respect to the Vrancea earthquake of August 30*.1986. Proceedings of the IAG General Meeting/Edingburgh 1989, included in this book.

Schuster, A. (2013): *Deformationsanalyse der Schlickdeponie Francop nach Lage und Höhe*. Bachelorarbeit. HafenCity Universität Hamburg, Fachbereich Geomatik, Hamburg.

Teunissen, P. (1989): *On Measures of Nonlinearity and Biases in Nonlinear Least-squares estimators*. In: Teunissen, P.: Estimation in Nonlinear Models. II Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Pisa, Italy, June 5-8, 1989.

Torge, W. (1975): *Geodäsie*. 1. Auflage. Verlag Walter de Gruyter, Berlin.

Wieser, M. (1988): *Theoretische Untersuchungen spektraler Methoden zur Analyse regelmäßiger Strukturen am Beispiel der Fouriertransformation geodätischer Netze*. Mitteilungen der Geodätischen Institute der technischen Universität Graz, Folge 60, Graz.

Zurmühl, R. & Falk, S. (1984): *Matrizen und ihre Anwendungen*. Band 1 und 2. Springer, Heidelberg.